Журнал экспериментальной и теоретической физики. Вып. 3
1946

О НЕСОСТОЯТЕЛЬНОСТИ РАБОТ А. А. ВЛАСОВА ПО ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ И ТЕОРИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА [1]

В. Гинзбург, Л. Ландау, М. Леонтович, В. Фок

Обсуждается ряд работ А. А. Власова, посвященных «обобщению концепции электронной плазмы» и теории твердого тела. Анализ этих работ показывает, что полученные А. А. Власовым результаты ошибочны.

В последнее время (в 1944 — 1945 гг.) в печати появился ряд работ А. А. Власова, посвященных «обобщению концепции электронной плазмы» и теории твердого тела [1—5] [2]. В этих работах автор приходит к выводу, что проводимый им по методу самосогласованного поля учет сил взаимодействия на «далеких» расстояниях «выявляет новые динамические свойства многоатомных систем и приводит к изменению наших представлений «газа», «жидкости», «твердого тела» в сторону объединения их с концепцией плазмы» и т. п.

Рассмотрение указанных работ А. Власова привело нас, однако, к убеждению об их полной несостоятельности и об отсутствии в них каких-либо результатов, имеющих научную ценность. Критике этих работ и посвящена настоящая статья; опубликование ее кажется нам целесообразным потому, что статьи А. А. Власова написаны так, что неспециалистам в области теоретической физики разобраться в них и выявить их истинное содержание может оказаться весьма трудным.

§ 1. В основе указанных работ А. А. Власова лежит метод, который можно, в известном смысле, назвать методом самосогласованного поля.

В прежних работах А. А. Власова (1938 г.) этот метод применялся к теории электронной плазмы, в которой главную роль играют кулоновские (медленно убывающие с расстоянием) силы. Такое применение метода законно и не встречает возражений (мы оставляем здесь в стороне математические ошибки А. А. Власова, допущенные им при решении уравнений и приведшие его к выводу о существовании «дисперсионного уравнения»; эти ошибки повторяются им и в его последних статьях и будут разобраны нами в § 2).

В новых работах проф. Власова [1, 2, 3, 4, 5] этот же метод применяется им к случаю коротко действующих сил, интеграл от потенциала которых, взятый по бесконечному пространству, сходится, и притом для тел в жидком и даже в кристаллическом состоянии. Такое применение метода самосогласованного поля, лежащее в основе выводов Власова, является неправильным и ведет к ошибочности результатов разбираемых работ.

Для вопросов, относящихся к термодинамическому равновесию (в частности в рамках классической статистики, на почве которой целиком стоит в этих работах А. Власов), общие методы статистики, например метод Гиббса,

---

[1] Статья печатается редакцией в виде, приданном ей авторами после ознакомления А. А. Власова с ее первоначальным текстом и ознакомления авторов с ответом А. А. Власова.

[2] Статья [1] в основном перекрывает статьи [3] и [4], а статья [2] перекрывает статью [5].

как известно, принципиально дают полное решение задачи. Поэтому метод «самосогласованного поля» может быть лишь приближенным вычислительным приемом, подлежащим обоснованию с помощью общих методов.

Однако правильность метода «самосогласованного поля» для короткодействующих сил в случае тел большой плотности при низких температурах ни Власовым ни кем-нибудь другим обоснована не была, хотя подобные методы и могут быть оправданы для случая, когда отношение плотности тела к температуре достаточно мало (газ, близкий к идеальному). В частности попытка А. А. Власова дать вывод основного применяемого им уравнения из распределения Гиббса может быть правильна лишь при этих условиях, что видно хотя бы уже из того, что А. А. Власовым используется больтцманновское выражение для вероятностей положения пар частиц.

Более того, применение «метода самосогласованного поля» приводит к выводам, противоречащим простым и бесспорным следствиям классической статистики, касающимся свойств тел при низких температурах.

Таким образом, представления А. А. Власова (принимающего ведь классическую статистику) ведут к фундаментальному внутреннему противоречию. Кроме того применение метода самосогласованного поля приводит (как мы также сейчас покажем) к результатам, физическая неправильность которых видна уже сама по себе.

Для случая термодинамического равновесия метод «самосогласованного поля» в том виде, как им пользуется А. А. Власов, сводится к следующему уравнению для плотности частиц (уравнение (26) работы [2])

$$\rho(\mathbf{r}) = A(T)\, e^{-\frac{V(r)}{kT}}; \qquad V(r) = \int K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,\rho(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' \tag{1}$$

где $K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ — потенциал взаимодействия двух частиц.

К этим уравнениям для определенности задачи должно быть в сущности добавлено еще условие нормировки ρ, задающее общее число частиц и состоящее в том, что это общее число частиц равно интегралу от ρ по всему объему, занятому телом. Из этого условия и должна быть определена зависящая от T постоянная $A(T)$.

Рассмотрим решение уравнения (1) при очень низких температурах и сопоставим его с известными результатами классической статистики. Для простоты разберем одномерный случай, цепочку частиц, потенциал взаимодействия которых $K(x_n - x_m)$ зависит только от расстояния между ними.

По классической статистике, применяя метод Гиббса, мы получаем следующее. Частицы находятся вблизи положений равновесий, определяемых из условий минимума потенциальной энергии системы

$$\frac{1}{2}\sum_{n,\,m} K(x_n - x_m), \qquad n \neq m,$$

так как только при этом условии вероятность состояния имеет заметную величину. Условия равновесия для внутренних точек

$$\sum_{m} K'(x_n - x_m) = 0 \tag{2}$$

удовлетворяются при периодическом расположении частиц: $x_n = nd$, так как $K'(x)$ — нечетная функция на x и, следовательно:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} K'(nd) = 0, \qquad n \neq 0. \tag{3}$$

Период d зависит от величины внешней силы p (давления), действующей на крайнюю частицу цепочки, и определяется из условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} K'(nd) = p. \tag{4}$$

Плотность частиц $\rho(x)$ для ограниченной цепочки частиц, когда задача имеет определенное решение, равна

$$\rho(x) = \text{const} \sum_{n=1} e^{-\frac{(x-nd)^2}{2\beta^2 n}}. \tag{5}$$

При этом средний квадрат β_n^2 определяется известным путем, зависит от расстояния от конца цепочки [3] и растет от края к середине ее (примерно по параболическому закону), как это и должно быть на основании простых и наглядных соображений.

Перейдем теперь к разбору свойств решений применяемого А. А. Власовым при низких температурах уравнения (1). Уравнение это в одномерном случае сводится к такому:

$$\rho(x) = A(T) e^{-\frac{V(x)}{kT}}; \qquad V(x) = \int K(x-\xi)\rho(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

причем

$$\int \rho(x)\,dx = M,$$

где M — число частиц. Как видно отсюда, при $T \to 0$, $\rho(x)$ будет иметь резкие максимумы и заметную величину вблизи точек x_n, для которых $V(x)$ имеет минимум, и для которых, следовательно,

$$V'(x_n) = 0. \tag{7}$$

Для бесконечной цепочки точки x_n будут расположены периодически, т. е. $x_n = nd$. Величину $V(x) = \int K(x-\xi)\rho(\xi)\,d\xi$ можно в этом случае, учитывая еще условие нормировки $\rho(x)$, написать в виде суммы:

$$V(x) = \sum K(x-nd). \tag{8}$$

Теперь условие (7) дает

$$\sum_n K'\big((m-n)\,d\big) = 0, \tag{9}$$

что совпадает с (3). Пока мы рассматриваем бесконечную цепочку, период d остается неопределенным (мало того в этом случае рассматриваемое решение заведомо неединственно; $\rho(x) = \text{const}$, очевидно, тоже удовлетворяет задаче). Для нахождения периода нужно и здесь рассмотреть ограниченную цепочку. При этом период будет определяться уравнением (4) и будет таким образом зависеть от внешней силы. На первый взгляд на основании сказанного может показаться, что все обстоит благополучно и «теория самосогласованного поля» в рассматриваемом случае приводит в точности к тем же результатам, что и общие методы классической статистики. Дело, однако, обстоит не так. Действительно, найдем, например, выражение для плотности $\rho(x)$. Для этого в (6) достаточно подставить $V(x)$ из (8), разложив эту величину в ряд по степеням $(x-nd)$ около каждого из узлов решетки. Этим путем найдем:

$$\rho(x) = \text{const} \sum e^{-\frac{(x-nd)^2}{2\alpha^2}}. \tag{10}$$

---

[3] См. например, М. Леонтович, Статистическая физика, 1944 г., § 16.

причем средний квадрат смещения частиц из положения равновесия равен:

$$\alpha^2 = \frac{kT}{\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} K''(nd)} \tag{11}$$

и одинаков для всех внутренних узлов цепочки. Из этой формулы, существенно отличающейся от выражения, вытекающего из классической статистики, виден также тот основной порок метода «самосогласованного поля», который и показывает его заведомую неприменимость к этим вопросам. Дело в том, что, как вытекает из вывода выражения (11), в сумме $\Sigma K''(nd)$ присутствует член, соответствующий $n = 0$.

Таким образом формулы (10) и (11) показывают, что распределение плотности существенно зависит от $K''(0)$ — от характера закона взаимодействия при бесконечно малом расстоянии между частицами, что нелепо уже само по себе. Заметим, что при нашем выводе мы молчаливо предполагали, что четная функция $K(x)$ (где $-\infty < x < +\infty$) непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка при $x = 0$. При этом предположении $K'(0) = 0$, и (9) совпадает с (3), но $K''(0)$ очевидно может и не быть нулем. Если же $K(x)$ вблизи точки $x = 0$ — не аналитическая функция, то результат будет опять существенно зависеть от ее поведения в этой области, т. е. указанное нелепое следствие теории остается и в этом случае.

Указанный порок метода самосогласованности поля, как легко видеть, не связан с частными свойствами рассмотренного решения; еще до интегрирования видно, что поведение $K(x)$ при $x = 0$ может играть существенную роль.

Добавим еще, что если в (1) $K(r)$ заменить на $K(r)\,e^{-\frac{K(r)}{kT}}$ (так пытается усовершенствовать свое уравнение А. А. Власов в конце работы [2], то хотя ход дискуссии изложенного нами вопроса и ее результаты и изменятся, но при этом возникнут новые трудности и новые противоречия с результатами классической статистики,

Исходя из разобранных выше посылок, А. А. Власов приходит к ряду выводов, относящихся к теории кристаллического состояния. Один из этих выводов, касающийся «наличия кристаллической структуры и ее спонтанного возникновения» ([1] § 10; [3] § 9), мы и разберем здесь, так как он приводит автора к далеко идущим утверждениям. Именно на основании этого вывода он говорит о «новой теории кристаллического состояния, совершенно отличной от теории М. Борна, в которой позиция каждого атома фиксирована около положения равновесия» ([1], стр. 40).

Решая уравнение получающееся из (1) с помощью линеаризации, автор приходит к выводу, что у последнего при известных условиях имеются периодические решения. Эту периодичность, как это особенно четко сформулировано им в начале § 9 статьи [3], он истолковывает как наличие кристаллической структуры. Период ее определяется уравнением (VIII) работы [2], которое при использовании формулы (8) той же работы принимают вид:

$$\frac{2N\Lambda}{kT}\int_0^\infty K(r)\sin\left(\frac{2\pi r}{\Lambda}\right)\cdot r\,dr = -1,$$

где Λ — период структуры. Согласно этой формуле, период Λ является функцией не только концентрации N-атомов, но и температуры T. Однако это, очевидно, невозможно, поскольку среднее число частиц в единице объема N задано. Период простой решетки равен $N^{-1/3}$ (или при сложной структуре ячейки отличается от этой величины множителем) и явно от температуры не зависит.

Тот факт, что интерпретация решений уравнения (1) в этом случае приводит автора к таким странным следствиям, не должен нас удивлять, так как этот случай лежит вне границ физической применимости используемого уравнения.

§ 2. Выше мы разбирали вопросы, связанные с теорией твердого тела. Помимо этого, А. А. Власов в указанных работах (см. в особенности [1] рассматривает нестационарные явления в многоатомных системах. Исходной здесь служит система уравнений (II) работы [2], причем член $\left[\frac{\partial f}{\partial c}\right]_{cm}$ полагается равным нулю и проводится линеаризация, т. е. решение пишется в виде $f = f_0 + \varphi$, где $\varphi \ll f_0$. В результате получается следующее уравнение (ф-ла (3), [3]

$$\frac{\partial \varphi}{dt} + \mathrm{v}\nabla\varphi = \frac{1}{m}\nabla_{\mathrm{v}} f_0 \nabla \iint K\left(|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|\right)\varphi(\mathrm{r}', \mathrm{v}, t)\, d\mathrm{v}\, d\mathrm{r}. \tag{12}$$

Автор ищет решение этого уравнения в виде

$$\varphi = g(\mathrm{v})\, e^{i(\omega t - \mathrm{kr})}.$$

что в результате подстановки в (12) приводит к уравнению для g:

$$g(\mathrm{v})(\mathrm{kv} - \omega) = \frac{\sigma}{m}(\mathrm{k}\nabla_{\mathrm{v}} f_0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathrm{v})\, d\mathrm{v} \tag{13}$$

$$\sigma = 4\Pi \int_0^{\infty} K(r)\, sm(kr) \cdot r dr.$$

Далее, А. А. Власов (см. (4), [1]) делит обе части этого уравнения на $(\mathrm{kv} - \omega)$, затем интегрирует обе части по dv и приходит, таким образом, к основному для него «дисперсионному уравнению» (см. (5), [1]):

$$\frac{\sigma}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathrm{k}\nabla_{\mathrm{v}} f_0)\, d\mathrm{v}}{\mathrm{kv} - \omega} = 1. \tag{14}$$

Из этого уравнения автор считает возможным определить связь между k и ω. Нахождению этой связи в различных случаях и посвящена бо́льшая часть работы [1].

Между тем уравнение (14) бессмысленно, поскольку фигурирующий в нем интеграл расходится при $kv - \omega = 0$.

А. А. Власов пытается обойти эту трудность просто тем, что берет главное значение интеграла, на что, разумеется, нет абсолютно никаких оснований, поскольку расходящийся интеграл можно «взять» также бесчисленным числом других способов. Как известно, если в физической проблеме встречается выражение, не имеющее математического смысла (например, расходящийся интеграл), то это означает, что либо в исходных уравнениях задачи не учтен какой-либо физический эффект, приводящий при его учете к разумным результатам, либо же при решении уравнений допущена математическая ошибка. В случае А. А. Власова дело обстоит именно последним образом, так как уравнение (14) вовсе не вытекает из интегрального уравнения (13). Из этого последнего уравнения вообще не получается какой-либо связи между k и ω и, таким образом, никакого «дисперсионного уравнения» не существует.

Ошибка А. А. Власова состоит в том, что, как мы указывали, он делит обе части (13) на $\mathrm{kv} - \omega$ и, таким образом, принимает равенство (см. (4) [1]):

$$g(\mathrm{v}) = \frac{\sigma \cdot (\mathrm{k}\nabla_{\mathrm{v}} f_0)}{m(\mathrm{kv} - \omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathrm{v})\, \alpha\, \mathrm{v}. \tag{15}$$

В действительности же из (13) вытекает не уравнение (15), а уравнение, отличающееся от (15) добавленной к правой его части некоторой несобственной функцией от v и ω, равной нулю при $kv \neq \omega$ и отличной от нуля при $v = \omega$. Наличие содержащей известный произвол функции и должно обеспечить математическую непротиворечивость решения [4]. Для получения этого решения можно, например, применить к (13) преобразование Фурье. В результате для функции

$$G(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathrm{v}) e^{i\mathbf{q}\mathrm{v}} dv$$

мы получаем:

$$G(\mathrm{q}) = \frac{ik\sigma}{m} \psi(0,0)\, e^{i\frac{\omega}{k}q_x} \int_0^{q_x} q_x F(q)\, e^{-i\frac{\omega}{k}q_x} dq_x + \psi(q_y, q_z)\, e^{i\frac{\omega}{k}q_k}, \qquad (16)$$

где $F(\mathrm{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 e^{i\mathrm{q}\mathrm{v}} d\mathrm{v}$ направление k принято за ось x и $\psi(q_y, q_z)$ произвольная функция. Мы видим, что решение для $G(\mathrm{q})$ содержит произвольную функцию $\psi(q_y, q_z)$ от двух аргументов. Такой же произвол содержится в сопряженной по Фурье с $G(q)$ исходной функцией $g(\mathrm{v})$ (представляющей собой функцию несобственную). Кроме функции $\psi(q_y, q_z)$, в решении остаются произвольными все четыре параметра k_x, k_y, k_z, ω и никакой связи между ними не получится.

Кроме того, здесь нужно, конечно, иметь в виду все сказанное нами относительно неприменимости метода «самосогласованного поля». Тем не менее вопрос о дисперсионном уравнении заслуживает отдельного разбора, так как в работе 1938 г. [6] А. А. Власов применял уравнение [12] к электронной плазме. В этом же случае, поскольку рассматриваются кулоновские силы, применение самосогласованного поля и, следовательно, уравнения (12) допустимо. Однако исследование вопроса автор опять проводит на основе несуществующего «дисперсионного уравнения» (14), вследствие чего большинство результатов этой работы также неверно. Мы не будем останавливаться на этом вопросе, так как исследование колебаний электронной плазмы проведено в работе Л. Ландау «О колебаниях электронной плазмы» [5]. В этой работе указано, как нужно ставить вопрос о решениях уравнения (12), на чем останавливаться здесь мы также не будем.

Поскольку все содержание работ А. А. Власова [1–5], относящееся к исследованию нестационарного случая, сводится к анализу несуществующего «дисперсионного уравнения», ясно, что его, выводы, касающиеся «вибрационных свойств» и «недиссипативных потоков и их спонтанного возникновения в газе», появляются лишь в результате указанных грубых ошибок.

Таким образом, сделанное в начале статьи утверждение об отсутствии в разобранных работах А. А. Власова [1–5] каких-либо положительных результатов представляется нам доказанным.

Поступило в редакцию
12.III.1945

---

[4] Выражение (15) не вытекает из уравнения (13), так как решение этого уравнения должно быть интегрируемо; поскольку в (13) входит $\int g(\mathrm{v}) dv$. Строго говоря при $\omega \neq 0$ уравнение (13) в терминах обычного анализа, рассматривающего лишь функции в обычном смысле слова, вообще не имеет решения. Решение существует, если использовать «несобственные» функции типа $\delta(x)$, что допустимо с точки зрения смысла данной задачи.

[5] ЖЭТФ (в печати) и Journal of Physics, 10, 25, 1946.

Литература

[1] А. А. Власов. Journ. of Phys. **9**, 26 (1945). [2] А. А. Власов. Journ. Phys. **9**, 190 (1945). [3] А. А. Власов, Известия АН СССР (серия физическая) 248 (1944). — [4] А. А. Власов, Ученые записки МГУ, выпуск 77, стр. 3 (1945). [5] А. А. Власов. Ученые записки МГУ, выпуск 77, стр. 30 (1945). — [6] А. Власов. ЖЭТФ, **8**, 291 (1938).

ON THE FAILURE OF A. A. VLASOV'S PAPERS ON GENERALIZE THEORY OF PLASMA AND THEORY OF SOLID STATE

By *V. Ginsburg, L. Landau, M. Leontovitsh, V. Fock*

Summary

Several papers by A. A. Vlasov concerning the ,,generalized concept plasma'' and the theory of solid state are discussed. The analysis shows t results obtained by Vlasov are erroneous.

Received
12.July.194