УДК 517

Кинетическое уравнение Власова, динамика сплошных сред и турбулентность

В. В. Козлов
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, Москва, ул. Губкина, д. 8
kozlov@pran.ru

Получено 20 июля 2010 г.

Рассматривается динамика континуума взаимодействующих частиц, описываемая кинетическим уравнением Власова. Выводится бесконечная цепочка точных уравнений движения такой среды в эйлеровом представлении и исследуются их общие свойства. Важным примером служит бесстолкновительный газ, демонстрирующий необратимое поведение. Несмотря на потенциальный характер взаимодействия отдельных частиц, для динамики континуума характерны диссипативные свойства. Рассматривается вопрос о возможности применения уравнения Власова к моделированию мелкомасштабной турбулентности.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Власова, уравнение Эйлера, континуум, турбулентность

V. V. Kozlov

The Vlasov kinetic equation, dynamics of continuum and turbulence

We consider a continuum of interacting particles whose evolution is governed by the Vlasov kinetic equation. An infinite sequence of equations of motion for this medium (in the Eulerian description) is derived and its general properties are explored. An important example is a collisionless gas, which exhibits irreversible behavior. Though individual particles interact via a potential, the dynamics of the continuum bears dissipative features. Applicability of the Vlasov equations to the modeling of small-scale turbulence is discussed.

Keywords: kinetic Vlasov's equation, Euler's equation, continuum, turbulence
MSC 2010: 37A60, 82B30, 82C05

1. Введение

Сплошная среда — это континуум взаимодействующих частиц. Поэтому при описании эволюции ключевую роль должны играть кинетические уравнения.

Обычно используют кинетическое уравнение Больцмана (оно исторически первое) или его модификации, возникающие в ходе анализа цепочки уравнений Боголюбова (the B-B-G-K-Y hierarchy) (см. [1, 2, 3]). Некоторые авторы считают подход Боголюбова чересчур формальным (см. обсуждение в [4]). Однако на этом пути удается получить гидродинамические уравнения с учетом вязкости.

Правда, здесь имеется принципиальная трудность, которая не преодолена до сих пор. Дело в том, что исходные уравнения Ньютона (на микроуровне) обратимы: они инвариантны при одновременном обращении времени и скорости

$$t \mapsto -t, \quad v \mapsto -v. \tag{1.1}$$

Однако кинетическое уравнение Больцмана (и его модификации), как и уравнения Навье–Стокса с вязкостью, необратимы. Поэтому представляется невозможным дать *строгое* обоснование методу Боголюбова.

В настоящей работе развивается подход, основанный на использовании кинетического уравнения Власова:

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial t} + \frac{\partial\rho^*}{\partial x_i}u_i - \frac{\partial\rho^*}{\partial u_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\iint \mathrm{K}(x,y)\rho^*(y,w,t)\,dw\,dy = 0. \tag{1.2}$$

Оно описывает эволюцию континуума частиц с потенциалом парного взаимодействия K. Будем предполагать, что $\mathrm{K}(x,y) = \mathrm{K}(y,x)$. Обычно считают, что ядро K зависит только от расстояния $|x-y|$. Отыскание потенциала взаимодействия возможно только в рамках квантовой механики. Уравнение (1.2), конечно, допускает инволюцию (1.1).

В уравнении (1.2) $\{x_i\}_1^n$ — координаты, а $\{u_i\}_1^n$ — скорости взаимодействующих частиц. Размерность n евклидова конфигурационного пространства не имеет принципиального значения. Плотность среды ρ^* — функция от x, u и t. Она неотрицательна, и

$$\iint \rho^*(x,u,t)\,dx\,du = m$$

— масса вещества. По повторяющимся индексам производится суммирование.

В уравнении (1.2) не учитываются внешние силы. Впрочем, это можно сделать совсем просто: к ядру K следует добавить функцию, не зависящую от переменных y. Выбор потенциала парного взаимодействия K зависит от рассматриваемой задачи. Например, при исследовании фигур равновесия вращающейся самогравитирующей жидкости K будет задавать гравитационное притяжение, а для плотных газов в качестве функции K естественно использовать полуэмпирический потенциал Леннарда-Джонса. Кстати сказать, при отсутствии взаимодействия (когда $\mathrm{K} = 0$) получаем содержательную модель Пуанкаре–Кнудсена бесстолкновительного газа. Уравнение Власова можно записать и для других типов взаимодействий (например, электромагнитного [5, 6]).

Уравнение Власова обладает следующим замечательным свойством. Для любого целого N оно допускает обобщенное решение вида

$$\rho^*(x,u,t) = \sum_{i=1}^{N} m_i\delta(x - x_i(t))\delta(u - u_i(t)). \tag{1.3}$$

Сингулярности интерпретируются как состояния системы N частиц, а коэффициенты — их массы. Если (1.3) — обобщенное решение (1.2), то координаты и скорости этих N частиц удовлетворяют обычным дифференциальным уравнениям Ньютона, описывающим эволюцию системы N взаимодействующих частиц с потенциалом К. Напомним, что взвешенными суммами (1.3) можно сколь угодно точно приблизить (в слабом смысле) плотность любого распределения. На этой идее основаны доказательства теорем о существовании решений (как обобщенных, так и классических) уравнения Власова (см., например, [7, 8, 9]).

Поскольку уравнение Власова обратимо, то остается принципиальный вопрос: могут ли решения этого уравнения описывать диссипативные процессы? Другими словами, может ли континуум взаимодействующих частиц демонстрировать необратимое макроскопическое поведение? Ответ оказывается положительным. Решение этой проблемы основано на анализе свойств *слабых пределов* решений уравнения (1.2) при неограниченном возрастании времени. Такой подход развит в работе [10].

Цель настоящей работы — вывести эйлеровы уравнения движения континуальных сред, описываемых уравнением Власова, и исследовать их общие свойства. В некоторых существенных чертах они отличаются от классических уравнений аэро- и гидродинамики. Даже в самом простом случае, когда $\mathrm{K} = 0$, эти уравнения по виду и свойствам не совпадают с классическими уравнениями идеального газа.

2. Уравнения движения

Воспользуемся подходом Эйлера и представим основные характеристики сплошной среды как функции от координат x и времени t. Они задаются усреднением динамических величин по скоростям (см. по этому поводу [3] и [5]). Введем плотность среды в конфигурационном пространстве

$$\rho(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^*(x,u,t)\,du \tag{2.1}$$

и поле скоростей

$$v_i(x,t) = \frac{\int u_i \rho^*(x,u,t)\,du}{\int \rho^*(x,u,t)\,du} = \frac{\int u_i\rho^*\,du}{\rho}. \tag{2.2}$$

Выведем сначала *уравнение неразрывности*, выражающее закон сохранения массы вещества:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \int \frac{\partial\rho^*}{\partial t}\,du = -\int \frac{\partial\rho^*}{\partial x_i}\,u_i\,du + \int \frac{\partial\rho^*}{\partial u_i}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i}\,du, \tag{2.3}$$

где

$$\mathrm{V}(x,t) = \iint \mathrm{K}(x,y)\rho^*(y,w,t)\,dw\,dy = \int \mathrm{K}(x,y)\rho(y,t)\,dy. \tag{2.4}$$

Первое слагаемое справа в (2.3) с учетом (2.2) принимает вид

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\int u_i\rho^*\,du = -\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\rho v_i).$$

А второе слагаемое справа в (2.3) обращается в нуль, поскольку

$$\int \frac{\partial\rho^*}{\partial u_i}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i}\,du = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i}\int \frac{\partial\rho^*}{\partial u_i}\,du = 0,$$

если $\rho^* \to 0$ при $|u| \to \infty$. Это естественное предположение сохраним и в дальнейшем.

Итак, соотношение (2.3) превращается в классическое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0. \tag{2.5}$$

Как показано в [5], это уравнение справедливо и при более общих предположениях о кинетике среды.

Выведем теперь *уравнение Эйлера*, выражающее теорему об изменении импульса системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} &= \int u_i \frac{\partial \rho^*}{\partial t}\, du = -\int u_i \frac{\partial \rho^*}{\partial x_j} u_j + \int u_i \frac{\partial \rho^*}{\partial u_j} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_j}\, du = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \int u_i u_j \rho^*\, du + \int u_i \frac{\partial \rho^*}{\partial u_j}\, du \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_j}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Преобразуем интеграл в последнем слагаемом:

$$\int u_i \frac{\partial \rho^*}{\partial u_j}\, du = -\int \rho^* \delta_{ij}\, du = -\rho \delta_{ij}. \tag{2.7}$$

После элементарных преобразований уравнение (2.6) (с учетом соотношения (2.7)) принимает вид уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial \mathrm{P}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i}, \tag{2.8}$$

где

$$\mathrm{P}_{ij}(x,t) = \int (u_i - v_i)(u_j - v_j) \rho^*(x,u,t)\, du \tag{2.9}$$

— тензор напряжений. Очевидно, он симметричный: $\mathrm{P}_{ij} = \mathrm{P}_{ji}$.

Функцию V можно интерпретировать как плотность потенциала «внутренних» сил. Последнее слагаемое в (2.8) имеет смысл силы, с которой среда действует на частицу в точке x в момент времени t. Его наличие связано с учетом *дальнодействия*: далекие частицы также оказывают влияние на движение среды. В феноменологическом подходе его обычно не учитывают.

В общем случае тензор напряжений P_{ij} не шаровой. Он будет шаровым лишь при некоторых дополнительных условиях: например, когда плотность ρ^* зависит от квадрата скорости. Последнее условие заведомо выполнено при $n = 1$. В этом случае интеграл (2.9)

$$\mathrm{p} = \int (u - v)^2 \rho^*\, du$$

будет *давлением* среды в потоке. При $n > 1$ в феноменологических моделях обычно полагают $\mathrm{P}_{ij} = \mathrm{p}\delta_{ij}$.

Согласно (2.4), уравнение Эйлера (2.8) является дифференциально-интегральным. При желании к нему можно добавить уравнение, описывающее эволюцию потенциала V. Для этого продифференцируем соотношение (2.4) по t и воспользуемся уравнением неразрывности (2.5):

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = -\int \mathrm{K}(x,y) \frac{\partial}{\partial y_i}(\rho v_i)\, dy. \tag{2.10}$$

Это уравнение также будет интегральным, поскольку в подынтегральное выражение входят неизвестные функции ρ и $v_1, \ldots, v_n$. Уравнение (2.10) можно слегка упростить, если предположить, что потенциал K зависит только от разности $|x-y|$, не имеет сингулярностей и

$$\mathrm{K}(|x-y|)\rho(y,t)v_i(y,t) \to 0 \tag{2.11}$$

при $|y| \to \infty$. Действительно, после интегрирования по частям получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\int \mathrm{K}(|x-y|)\rho v_i\,dy. \tag{2.12}$$

Здесь было использовано еще одно простое соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,\mathrm{K}(|x-y|) = -\frac{\partial}{\partial y_i}\,\mathrm{K}(|x-y|). \tag{2.13}$$

Отметим, что вместо условия (2.11) достаточно предположить, что рассматривается задача с *периодическими граничными условиями*: все функции (в том числе и потенциал K) периодичны по $x_1, \ldots, x_n$.

Ясно, что система уравнений (2.5) и (2.8) незамкнутая: ее необходимо дополнить соотношением для тензора напряжений. Действуя в том же духе, мы получим дополнительные уравнения, в которые входят новые моменты скоростей, и так далее. В итоге *точные* уравнения движения будут представлять *бесконечную* цепочку зацепляющихся уравнений. Это обстоятельство уже отмечалось А. А. Власовым [5]. При феноменологическом подходе цепочку уравнений обычно обрывают на третьем шаге, добавляя алгебраические соотношения между основными переменными. Правда, эти «уравнения состояния» справедливы лишь при некоторых дополнительных предположениях (вроде условий локального равновесия или локальной обратимости). Более того, решения таких «усеченных» уравнений обладают совершенно иными качественными свойствами.

3. Бесконечная цепочка уравнений ($n = 1$)

Упомянутая выше бесконечная цепочка зацепляющихся уравнений наиболее просто выглядит в одномерном случае. Будем считать, что плотность ρ^* очень быстро убывает на бесконечности по скорости:

$$u^k\rho^*(x,u,t) \to 0$$

при $|u| \to \infty$ для всех $k \geqslant 0$.

Положим

$$\begin{gathered}
f_0(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho^*(x,u,t)\,du = \rho, \\
f_k(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^k\rho^*(x,u,t)\,du \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho^*(x,u,t)\,du, \quad k \geqslant 1.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Имеем (при $k \geqslant 1$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho f_k}{\partial t} &= \int u^k \frac{\partial \rho^*}{\partial t}\,du = -\int u^{k+1}\frac{\partial \rho^*}{\partial x}\,du + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\int u^k \frac{\partial \rho^*}{\partial u}\,du = \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\,(\rho f_{k+1}) - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\,k\rho f_{k-1}.
\end{aligned}$$

Эти уравнения проще представить в новых переменных $\{g_k\}_0^\infty$:

$$g_0 = f_0, \quad g_k = \rho f_k \quad (k \geqslant 1).$$

В итоге получаем бесконечную систему уравнений движения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_k}{\partial t} + \frac{\partial g_{k+1}}{\partial x} + k g_{k-1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ &\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \int \mathrm{K}(x, y)\frac{\partial g_1}{\partial y}\, dy = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

При $k = 0$ формально получаем уравнение неразрывности (смысл обозначения g_{-1} несущественен). Если K зависит от разности $|x - y|$, то в отсутствие сингулярностей второе уравнение (совпадающее с уравнением (2.10)) можно переписать в градиентном виде:

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int \mathrm{K}(|x - y|) g_1\, dy = 0. \tag{3.3}$$

Если $\mathrm{K} \neq 0$, то уравнения (3.2) нелинейные. Вообще, вместо второго дифференциального уравнения (3.2) (или уравнения (3.3)) можно взять «конечное» функциональное соотношение

$$\mathrm{V} = \int \mathrm{K}(x, y) g_0(y, t)\, dy. \tag{3.4}$$

Пример. Положим $\mathrm{K} = \delta(x-y)$ (упругое отталкивание). Тогда $\mathrm{V} = \rho$ и уравнения (3.2) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} + \frac{\partial g_{k+1}}{\partial x} + k g_{k-1}\frac{\partial g_0}{\partial x} = 0, \quad k \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Второе уравнение системы (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial x} = 0.$$

Оно вытекает из (3.3). Но его не следует добавлять к системе (3.5), поскольку оно совпадает с уравнением неразрывности ($k = 0$).

Хорошо известно, что при упругом ударе двух одинаковых частиц происходит простой обмен скоростями: частицы как бы вообще не «замечают» друг друга. С этой точки зрения среда будет бесстолкновительной и вместо нелинейной цепочки (3.5) получим линейную систему уравнений

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} + \frac{\partial g_{k+1}}{\partial x} = 0, \quad k \geqslant 0.$$

Однако если при упругом соударении мы продолжаем *различать* одинаковые частицы, то их статистика будет описываться нелинейной системой (3.5).

Потенциал в виде δ-функции Дирака определяет закон упругого удара двух частиц. Если заменить эту обобщенную функцию более общей $\mu\delta(x - y)$ с произвольным положительным коэффициентом, то этот потенциал снова будет задавать упругое соударение. Однако в континуальном случае ситуация иная: в уравнениях движения (3.5) в последнем слагаемом появится множитель μ, что приведет к изменению динамики среды, состоящей из сталкивающихся частиц. Правда, при $\mu \neq 0$ подстановка $g_k \mapsto g_k/\mu$, $k \geqslant 0$ снова приводит к уравнению (3.5).

Уравнения (3.5) были получены Бенни еще в 1973 г. из системы уравнений двумерных течений невязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле сил тяжести в приближении длинных волн [11]. Позже система (3.5) была получена из кинетического уравнения Власова [12, 13]. Кроме того, установлена ее полная интегрируемость как бесконечномерной гамильтоной системы [12, 14, 15].

В содержательных случаях условия разрешимости бесконечной цепочки (3.2) сводятся к разрешимости исходного уравнения Власова. Пусть

$$g_0^0(x), g_1^0(x), g_2^0(x), \ldots \tag{3.6}$$

— последовательность данных Коши (например, при $t=0$) для неизвестных функций $\{g_k\}_0^\infty$. Предположим, что при всех x эта последовательность будет *позитивной*. Тогда (по теореме Гамбургера) при каждом x найдется неубывающая функция $u \mapsto \sigma(u,x)$, такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^k \, d\sigma(u,x) = g_k^0(x)$$

(см., например, [11]). Функция σ почти всюду дифференцируема:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \rho_0^*(x,u) \geqslant 0,$$

где $\rho_0^*(x,u) = \rho^*(x,u,0)$.

Далее ρ_0^* будем рассматривать как условие Коши для исходного уравнения Власова. Если $\rho_0^* \in L_{\mathrm{p}}$, то следует искать обобщенное решение этого уравнения, а если ρ_0^* — гладкая функция, то — классическое решение. Условия существования и единственности таких решений уравнения (1.2) можно найти в [8, 10]. Если соответствующее решение существует, то решение бесконечной цепочки уравнений (3.2) также существует и дается формулами (3.1). Потенциал V находится по формуле (3.4).

В заключение этого параграфа обсудим вопрос о стационарных решениях системы (3.2) для периодических граничных условий в предположении, что потенциал K зависит от расстояния $|x-y|$ и не имеет сингулярности. Покажем, что тогда эта система допускает простое частное решение

$$g_k = c_k = \mathrm{const}. \tag{3.7}$$

Конечно, набор чисел $\{c_k\}_0^\infty$ должен составлять позитивную последовательность.

Собственно, надо только показать, что $\mathrm{V} = \mathrm{const}$, если $g_0 = \mathrm{const}$. Действительно, согласно (3.4) и (2.13),

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = g_0 \int \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x} \, dy = -g_0 \int \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y} \, dy = 0.$$

Однако не все равновесные решения (3.7) устойчивы. Это зависит от вида потенциала K. Мы вернемся к этому вопросу в § 8.

4. Интеграл энергии

Ввиду свойства консервативности, бесконечная цепочка уравнений движения допускает законы сохранения. Прямым следствием уравнения неразрывности является закон сохранения массы

$$\int \rho(x,t) \, dx = m = \mathrm{const}.$$

Кроме того, из уравнения Эйлера (2.8) выводится закон сохранения импульса

$$\int \rho v_i \, dx = \text{const}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Для вывода требуется доказать не вполне очевидное равенство

$$\int \rho \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i} \, dx = 0.$$

Его доказательство использует тождество (2.13).

Полная энергия системы также сохраняется. Но здесь надо точно определить кинетическую и потенциальную энергию и попытаться выразить эти величины через эйлеровы переменные. Положим

$$\mathrm{T}(t) = \frac{1}{2} \iint u^2 \rho^*(x, u, t) \, dx \, du \tag{4.1}$$

— кинетическая энергия континуума, и

$$\mathrm{W}(t) = \frac{1}{2} \iiiint \rho^*(x, u, t) \rho^*(y, w, t) \mathrm{K}(x, y) \, dx \, du \, dy \, dw \tag{4.2}$$

— суммарная потенциальная энергия взаимодействия. Конечно, предполагается, что интегралы (4.1) и (4.2) сходятся и являются гладкими функциями времени. Если в формуле (4.2) опустить множитель $1/2$, то потенциальная энергия взаимодействия каждой пары частиц будет учитываться дважды.

Если $\mathrm{K}(x, y) = \mathrm{K}(y, x)$, то полная энергия системы сохраняется:

$$\mathrm{T}(t) + \mathrm{W}(t) = \text{const}. \tag{4.3}$$

Это утверждение доказывается с использованием уравнения Власова и формулы Гаусса–Остроградского (см. [10]).

С учетом обозначения (2.1),

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2} \iint \rho(x, t) \rho(y, t) \mathrm{K}(x, y) \, dx \, dy. \tag{4.4}$$

Не следует думать, что

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \int v^2 \rho \, dx, \tag{4.5}$$

где v определяется формулой (2.2). Эта формула не справедлива даже при $n = 1$. На самом же деле интеграл (4.1) всегда *больше* интеграла (4.5). Действительно,

$$\begin{aligned} &\iint u^2 \rho^* \, dx \, du - \int \left[\frac{\int u \rho^* \, du}{\rho} \right]^2 \rho \, dx = \\ &= \int \frac{1}{\rho} \left\{ \int u^2 \rho^* \, du \int \rho^* \, du - \left[\int u \rho^* \, du \right]^2 \right\} dx > 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

по неравенству Коши–Буняковского. В (4.6) стоит знак строгого неравенства, поскольку отношение функций $u\sqrt{\rho^*}$ и $\sqrt{\rho^*}$ непостоянно.

Подчеркнем, что интеграл энергии (4.3) не есть следствие только уравнения Эйлера (2.8) и уравнения неразрывности. Уравнения движения феноменологической идеальной сплошной среды допускают интеграл энергии, в котором кинетическая энергия задается формулой (4.5), а не (4.1). В нашем же случае этот закон сохранения является следствием *всей* бесконечной цепочки уравнений движения. При $n = 1$ интеграл (4.1), очевидно, равен

$$\frac{1}{2}\int g_2(x,t)\,dx.$$

Ввиду неотрицательности кинетической энергии, интеграл энергии (4.3) можно использовать для исследования устойчивости равновесных состояний. Согласно принципу Лагранжа–Дирихле, если потенциальная энергия принимает строго минимальное значение, то равновесие устойчиво.

Пример. Продемонстрируем этот принцип на простой задаче об устойчивости равновесия одномерной среды с периодическим граничным условием, которая обсуждалась в конце § 3. Положим снова $\mathrm{K} = \delta(x - y)$. Этот потенциал соответствует закону упругого удара.

Сначала сделаем одно замечание общего характера. Положим $u = v_0 + w$, $v_0 = \mathrm{const}$. Ясно, что w — это относительная скорость частиц в системе отсчета, движущейся со скоростью v_0. Ограничимся рассмотрением движений сплошной среды с нулевым значением импульса относительного движения:

$$\iint \rho^* w\,dx\,du = 0. \tag{4.7}$$

Это предположение исключает возможность движения среды с постоянной скоростью $v \neq v_0$. В противном случае равновесное состояние было бы заведомо неустойчивым. С учетом (4.7),

$$\frac{1}{2}\iint u^2\rho^*\,dx\,du = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}\iint w^2\rho^*\,dx\,du.$$

При исследовании устойчивости относительного равновесия первое постоянное слагаемое не играет никакой роли.

Для упругих столкновений суммарная потенциальная энергия (4.4) равна

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\int \rho^2(x,t)\,dx. \tag{4.8}$$

Пусть $\rho = \rho_0 > 0$ — равновесное значение плотности. Положим

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \xi(x,t),$$

где ξ — возмущение плотности. Поскольку при возмущениях суммарная масса вещества не меняется, то

$$\int \xi(x,t)\,dx = 0. \tag{4.9}$$

Функционал (4.8) принимает стационарное значение в точке $\rho = \rho_0$ при ограничении (4.9):

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\int \rho_0^2\,dx + \frac{1}{2}\int \xi^2\,dx.$$

Второе слагаемое является второй вариацией функционала (4.8) в точке $\rho = \rho_0$. Эта квадратичная форма, очевидно, положительно определена. Что и доказывает устойчивость как состояния равновесия, так и стационарных движений. В частности, в сплошной среде с упругими ударами не образуются кластеры — заметные скопления частиц.

5. Тождество Лагранжа

Если $\mathrm{K}(\cdot)$ — однородная функция степени s, то

$$\ddot{\mathrm{I}} = 4\mathrm{T} - 2s\mathrm{W}, \tag{5.1}$$

где

$$\mathrm{I} = \iint x^2 \rho^*(x,u,t)\,dx\,du = \int x^2 \rho(x,t)\,dx$$

— момент инерции континуума частиц относительно начала системы отсчета ($x^2 = \Sigma x_i^2$), а T и W — кинетическая и потенциальная энергия соответственно, которые определяются формулами (4.1) и (4.4). С учетом интеграла энергии

$$\mathrm{T} + \mathrm{W} = h$$

равенство (5.1) представляется в виде

$$\ddot{\mathrm{I}} = 4h - 2(s+2)\mathrm{W}. \tag{5.2}$$

Формула (5.1) (как и (5.2)) — непосредственное следствие кинетического уравнения Власова — получена в [10]. Новое наблюдение состоит в том, что фигурирующие в (5.2) переменные (момент инерции и суммарная потенциальная энергия) допускают простое и естественное представление в эйлеровых переменных.

Из формулы (5.2) можно вывести ряд интересных следствий. Пусть, например, $s = -2$: сила взаимодействия убывает как куб расстояния между частицами. Тогда $\ddot{\mathrm{I}} = 4h = \mathrm{const}$. Следовательно, если $h > 0$, то облако частиц разлетается в бесконечность, а при $h < 0$ происходит коллапс: это облако в некоторый момент времени схлопывается в его центре масс.

Приведем еще два примера.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда взаимодействие отсутствует: $\mathrm{K} \equiv 0$. Эта функция будет однородной с *любой* степенью однородности s. Поскольку $\mathrm{W} = 0$, то тождество Лагранжа (5.1) при всех s будет иметь вид $\ddot{\mathrm{I}} = 4\mathrm{T}$. Согласно закону сохранения энергии, $\mathrm{T} = h = \mathrm{const}$, причем $h > 0$, если $\rho^* > 0$ на множестве положительной меры. Таким образом, $\mathrm{I}(t) \to \infty$ при $t \to \pm\infty$ и частицы бесстолкновительного газа разлетаются в бесконечность.

Пример 2. Пусть теперь $\mathrm{K} = \delta(x-y)$. Это однородная обобщенная функция со степенью однородности $s = 0$. Формула Лагранжа (5.1) имеет тот же вид, что и в примере 1. Однако она имеет другое содержание, поскольку в этом случае кинетическая энергия уже не сохраняется. Согласно (5.2),

$$\ddot{\mathrm{I}} = 4\Big(h - \int \rho^2(x,t)\,dx\Big).$$

Для гравитационного притяжения, когда $s = -1$, формула (5.1) принимает вид

$$\ddot{\mathrm{I}} = 4\mathrm{T} + 2\mathrm{W}. \tag{5.3}$$

Рассмотрим частный случай движения в трехмерном евклидовом пространстве, когда сплошная среда с гравитационным притяжением частиц вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью ω относительно некоторой неподвижной в пространстве оси. Такие движения будут *относительными равновесиями*. Очевидно, для таких движений $\mathrm{I}(t) = \mathrm{const}$. Поэтому из (5.3) вытекает условие относительного равновесия

$$2\mathrm{T} + \mathrm{W} = 0. \tag{5.4}$$

Вспомним теперь, что кинетическая энергия T превосходит интеграл (4.5), значение которого на относительном равновесии равно $J\omega^2/2$, где J — момент инерции тела относительно оси вращения. Следовательно, из (5.4) вытекает неравенство

$$J\omega^2 + \mathrm{W} < 0. \tag{5.5}$$

Напомним, что для гравитационного притяжения $\mathrm{W} < 0$.

Условие (5.5) полезно сравнить с условием равновесия *однородной* вращающейся жидкости, частицы которой притягиваются по закону всемирного тяготения. Оно получено Пуанкаре [12] с использованием уравнений движения идеальной жидкости и имеет другой вид:

$$\mathrm{W} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{3}{5}\,\mathrm{U}_0\Lambda,$$

где U_0 — значение функции

$$\mathrm{V} + \frac{\omega^2}{2}\,(x_1^2 + x_2^2) \tag{5.6}$$

на границе тела (вращение происходит вокруг оси x_3; во всех точках границы вращающейся жидкости функция (5.6) постоянна), Λ — объем вращающейся жидкости. Подчеркнем, что при выводе условия Пуанкаре не учитывалось тождество Лагранжа. Для относительных равновесий дискретного набора гравитирующих масс вместо неравенства (5.5) имеем точное равенство.

Из (5.5) вытекает предельное значение угловой скорости:

$$\omega^2 < -\frac{\mathrm{W}}{J}. \tag{5.7}$$

Эту формулу можно сравнить с пределом Пуанкаре для *однородной* вращающейся жидкости:

$$\omega^2 < 2\pi\gamma\rho, \tag{5.8}$$

где γ — гравитационная постоянная, ρ — постоянная плотность. Фигура равновесия вращающейся жидкости сплюснута у полюсов. Поэтому если в (5.7) W заменить гравитационной энергией однородного шара, а J его моментом инерции, то отношение $-\mathrm{W}/J$ только возрастет. Тогда из (5.7) получим грубую оценку

$$\omega^2 < \frac{5}{2}\,\pi\gamma\rho, \tag{5.9}$$

которая не сильно отличается от (5.8).

Конечно, надо иметь в виду, что неравенство (5.7) определяет условие равновесия другой, более сложной системы, описываемой бесконечной цепочкой уравнений движения. Поэтому сравнение формул (5.8) и (5.9) носит условный характер.

6. Диссипативные свойства уравнений движения

Могут ли решения уравнений движения континуума взаимодействующих частиц демонстрировать необратимое поведение? Казалось бы, на этот вопрос имеется очевидный отрицательный ответ, поскольку в основе рассматриваемой модели лежит консервативное взаимодействие и бесконечная цепочка уравнений движения допускает закон сохранения —

интеграл энергии. Однако вопреки представлениям, основанным на известных свойствах классических уравнений идеальных сред, рассматриваемую модель на самом деле следует считать необратимой.

Сначала поясним сказанное в простейшем случае, когда взаимодействие отсутствует ($\mathrm{K}=0$). Тогда кинетическое уравнение Власова заменяется более простым уравнением Лиувилля. Рассмотрим для простоты одномерный случай, когда частицы бесстолкновительного газа заключены в отрезке

$$\mathrm{I} = \{0 \leqslant x \leqslant l\}$$

и упруго отражаются от его концов. Более общая задача об эволюции бесстолкновительного газа в прямоугольном параллелепипеде с зеркальными стенками не сложнее в техническом отношении.

Пусть $\rho_0^*(x,u)$ — плотность распределения в начальный момент времени. Удобно перейти к накрытию

$$\mathbb{T}^1\{\varphi \mod 2\pi\} \to \mathrm{I}, \tag{6.1}$$

зеркально отразив отрезок относительно одного из концов и отождествив концы полученного удвоенного отрезка. В результате вместо колебательного движения точки вдоль отрезка мы получим вращательное движение по окружности в одну сторону.

Накрытие (6.1) представляется следующими явными формулами:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\pi x}{l}, && \text{когда } x \text{ увеличивается от 0 до } l \\ & && \text{(точка движется вправо)}, \\ \varphi &= 2\pi - \frac{\pi x}{l}, && \text{когда } x \text{ уменьшается от } l \text{ до 0} \\ & && \text{(точка движется влево)}. \end{aligned}$$

Угловая скорость движения частицы по окружности постоянна:

$$\dot\varphi = \frac{\pi u}{l}.$$

Регуляризацию (6.1) рассматривал еще Пуанкаре [13]. Многомерный случай обсуждается в [14].

Поднимем теперь начальную плотность $\rho_0^*\colon \mathrm{I}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ до функции $\widetilde{\rho}_0^*\colon \mathbb{T}^1\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (при отражении от конца отрезка I и инволюции $u\mapsto -u$ функция $\widetilde{\rho}_0^*$ не меняется). Периодической по координате функции $\widetilde{\rho}_0^*$ можно сопоставить ее ряд Фурье:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \rho_m(u) e^{im\varphi}. \tag{6.2}$$

Его коэффициенты просто вычисляются по исходной плотности:

$$\rho_m = \frac{1}{2l}\left[\int_0^l \rho_0^*(x,u)e^{i\pi m x/l}\,dx + \int_0^l \rho_0^*(x,-u)e^{-i\pi m x/l}\,dx\right].$$

Теорема 1. *Пусть $g(u)$ — измеримая функция и все функции $g\rho_m$, $m\in\mathbb{Z}$, суммируемые. Если*

$$\sum \int_{-\infty}^{\infty} |g\rho_m|\,du < \infty,$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)\rho^*(x,u,t)\,du \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)\rho_0(u)\,du$$

при $t \to \pm\infty$ *равномерно по* $x \in \mathrm{I}$.

Напомним, что

$$\rho_0(u) = \frac{1}{2l}\left[\int\limits_0^l \rho_0^*(x,u)\,dx + \int\limits_0^l \rho_0^*(x,-u)\,dx\right]$$

— свободный коэффициент в ряде Фурье (6.2). Эта функция, очевидно, четная. Как показано в [14], ρ_0 — слабый предел плотности ρ^* — решения кинетического уравнения Лиувилля при неограниченном возрастании времени.

Следствие 1. *Если*

$$\sum \int |\rho_m(u)|\,du < \infty, \tag{6.3}$$

то $\rho(x,t) \to m/l$ *при* $t \to \pm\infty$ *равномерно по* x.

Это утверждение установлено ранее в [15]. Добавление произвольной функции g не вносит никаких новых трудностей.

Рассмотрим теперь поведение моментов скоростей (3.1) при неограниченном возрастании времени.

Следствие 2. *Если*

$$\sum \int |u^k\rho_m(u)|\,du < \infty, \tag{6.4}$$

то

$$f_k(x,t) \to \frac{l}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^k\rho_0(u)\,du$$

при $t \to \pm\infty$ *равномерно по* x.

Поскольку ρ_0 — четная функция, то $\lim f_k = 0$ при нечетных k; если же k четно, то $\lim f_k > 0$.

Следствие 3. *Если выполнено* (6.3) *и*

$$\sum \int |u\rho_m(u)|\,du < \infty,$$

то

$$v(x,t) \to 0 \tag{6.5}$$

при $t \to \pm\infty$ *равномерно по* $x \in \mathrm{I}$.

Соотношение (6.5) выглядит удивительным, поскольку изначально никакого трения не вводится. Это обстоятельство радикально отличает бесстолкновительный газ от классического идеального газа, который будет совершать незатухающие колебания.

Как известно, условие вида (6.3) эквивалентно абсолютной сходимости ряда Фурье (6.2). Вероятно, его можно ослабить для обеспечения стабилизации плотности бесстолкновительного газа при неограниченном возрастании времени. Однако, ослабляя условие (6.3), мы можем потерять свойство равномерной сходимости.

При наличии взаимодействия картина в общих чертах остается той же. Только ее анализ в техническом отношении сильно усложняется. Отметим два существенных момента. Во-первых, определение слабой сходимости решений кинетического уравнения Власова надо усилить, заменив обычный предел по времени пределом средних арифметических (по Чезаро). Во-вторых, условие слабой сходимости по Чезаро тесно связано с наличием инвариантной счетно-аддитивной меры бесконечномерной динамической системы, порождаемой кинетическим уравнением Власова. Подробности содержатся в [10].

Пример. Рассмотрим случай, когда

$$\mathrm{K}(z) = \frac{kz^2}{2}, \quad k = \mathrm{const} > 0.$$

Мы имеем континуум частиц, связанных друг с другом упругими пружинами с коэффициентом упругости k. Центр масс этой системы движется равномерно и прямолинейно. Введем инерциальную систему отсчета, начало которой совпадает с центром масс континуума осцилляторов. Легко проверить, что в этой системе уравнение Власова перейдет в кинетическое уравнение Лиувилля для обычного гармонического осциллятора:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^*}{\partial x_i}\, u_i - k\frac{\partial \rho^*}{\partial u_i}\, x_i = 0$$

(см. [10], § 2). Оно легко решается. Запишем в явном виде его решение при $n = 1$. Пусть $f(x, u)$ — начальная плотность (данное Коши при $t = 0$). Тогда

$$\rho^*(x, u, t) = f(x\cos kt - \frac{u}{k}\sin kt, kx\sin kt + u\cos kt). \tag{6.6}$$

Ясно, что эта функция периодична по t и поэтому не имеет обычного предела при $t \to \infty$ (если, конечно, $f \neq \mathrm{const}$). Плотность сплошной среды осцилляторов $\rho(x, t)$ также $2\pi/\sqrt{k}$-периодична по t и поэтому тоже не стабилизируется при $t \to \infty$.

Кстати сказать, упругое взаимодействие по сути является единственным исключением, когда решения уравнения Лиувилля не имеют слабого предела при неограниченном возрастании времени. Выход состоит во введении дополнительного усреднения: заменяем обычную сходимость по времени сходимостью по Чезаро. Введение дополнительного усреднения — обычный прием в статистической механике.

В нашем случае плотность (6.6) слабо сходится по Чезаро к измеримой функции

$$g(\xi), \quad \xi^2 = \frac{u^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

В свою очередь плотность ρ в пространстве конфигураций слабо сходится к

$$\overline{\rho}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\, du.$$

При некоторых дополнительных условиях на функцию g плотность $\overline{\rho}(x)$ будет неограниченно убывать при $|x| \to \infty$. Например, если $g(\xi) = c\exp(-\beta\xi^2)$, $\beta > 0$, то $\overline{\rho}$ будет пропорциональна плотности нормального распределения.

В самом общем случае слабый предел по Чезаро решений кинетического уравнения Власова будет стационарным решением (возможно, обобщенным) этого же уравнения. Задача их описания весьма нетривиальна. Первые простые наблюдения в этом направлении содержатся в книге [5].

При $n=1$ стационарные решения уравнения Власова удовлетворяют нелинейному функционально-интегральному уравнению

$$\rho^*(x,u) = f\left(\frac{u^2}{2} + \iint \mathrm{K}(x,y)\rho^*(y,w)\,dy\,dw\right). \tag{6.7}$$

Здесь f — заранее неизвестная функция одного переменного. Из (6.7) вытекает итерационная формула

$$\rho^* = f\left(\frac{u^2}{2} + \iint \mathrm{K}f\left(\frac{w^2}{2} + \iint \ldots\right)dy\,dw\right).$$

Задача упирается в доказательство сходимости этих итераций и установлении степени гладкости искомой функции.

Например, пусть K — потенциал гравитационного взаимодействия, а $f(z) = \alpha\exp(-\beta z)$, $\alpha, \beta = \mathrm{const} > 0$ (распределение Гиббса). Как показано в [16], такого стационарного решения кинетического уравнения Власова не существует во всем фазовом пространстве. С другой стороны, при некотором специальном выборе функции f уравнение (6.7) допускает глобально определенные решения (см. [17, 18, 19]).

7. Стационарные решения уравнения Власова

Вопрос о существовании и гладкости решений уравнения (6.7) очень непростой. Мы обсудим его для случая с периодическими граничными условиями, когда конфигурационное пространство является n-мерным тором

$$\mathbb{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$$

и ядро K в уравнении Власова содержит в качестве множителя малый параметр ε. Будем искать стационарные периодические решения этого уравнения, которые можно представить в виде степенного ряда по ε (пусть даже формального):

$$\rho^* = f_0(x,u) + \varepsilon f_1(x,u) + \ldots. \tag{7.1}$$

Все функции $f_k\colon \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(k \geqslant 0)$ предполагаются гладкими (бесконечно дифференцируемыми). Подставляя (7.1) в уравнение Власова, получим бесконечную цепочку уравнений для последовательного определения коэффициентов $f_0, f_1, \ldots$.

Кстати сказать, можно не вводить малый параметр ε, а положить в (7.1) $\varepsilon = 1$. Тогда ряд (7.1) будет соответствовать одному из возможных методов последовательных приближений для отыскания точного решения стационарного уравнения Власова. В общих чертах он эквивалентен известному методу Гильберта решения кинетического уравнения Больцмана (см. [20]).

Вспомним наше предположение, что ядро $\mathrm{K}\colon \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ не меняется при перестановках переменных. Положим

$$\mathrm{W}(x) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} \mathrm{K}(x,y)\,dy.$$

Будем считать этот потенциал гладкой функцией. Во всяком случае будем предполагать определенными ее коэффициенты Фурье

$$w_k = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} \mathrm{W}(x)e^{i(k,x)}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Если ядро периодично и зависит только от разности $|x-y|$, то $w_k = 0$ для всех $k \neq 0$. Этот случай для нас не представляет интереса.

Введем резонансное множество $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}^n = \{u\}$, состоящее из гиперплоскостей

$$(k, u) = 0, \tag{7.2}$$

причем $w_k \neq 0$. В типичном случае оно, конечно, всюду плотно заполняет пространство скоростей. Итак, будем предполагать, что замыкание P совпадает со всем $\mathbb{R}^n = \{u\}$.

Будем последовательно искать коэффициенты ряда (7.1). Функции f_0 и f_1 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i}\, u_i = 0, \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\, u_i - \frac{\partial f_0}{\partial u_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\iint \mathrm{K}(x, y) f_0(y, w)\, dy\, dw = 0. \tag{7.4}$$

Решим сначала первое уравнение методом Фурье. Пусть

$$f_0 = \sum f^{(k)}(u) e^{i(k,x)}, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Тогда из (7.3) получим соотношения

$$(k, u) f^{(k)}(u) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Поскольку функции $f^{(k)}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны, то при $k \neq 0$ они тождественно равны нулю. Следовательно, $f_0 = f^{(0)}$ и поэтому f_0 не зависит от угловых переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Но тогда

$$\iint \mathrm{K}(x, y) f_0(w)\, dy\, dw = \frac{m}{(2\pi)^n}\, \mathrm{W}(x),$$

где

$$m = \iint f_0(u)\, dx\, du \tag{7.5}$$

— масса газа при $\varepsilon = 0$. Мы, конечно, предполагаем, что $0 < m < \infty$. Следовательно, уравнение (7.4) принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\, u_i = \frac{m}{(2\pi)^n}\frac{\partial f_0}{\partial u_j}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_j}.$$

Его также можно решить методом Фурье. Оно эквивалентно бесконечной цепочке соотношений

$$(k, u)\mathrm{F}_k(u) = \frac{m}{(2\pi)^n}\left(k, \frac{\partial f_0}{\partial u}\right) w_k,$$

где F_k — коэффициенты Фурье f_1 как периодической функции от x.

Пусть $u \in \mathrm{P}$. Тогда $(k, u) = 0$, а $w_k \neq 0$. Следовательно,

$$\left(k, \frac{\partial f_0}{\partial u}\right) = 0.$$

Поскольку $k \neq 0$, то

$$\frac{\partial f_0}{\partial u} = \lambda u \tag{7.6}$$

на гиперплоскости $(k, u) = 0$. Так как P всюду плотно в $\mathbb{R}^n = \{u\}$, то соотношение (7.6) выполняется тождественно. Но тогда f_0 — функция от энергии:

$$f_0 = \Phi\left(\frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{2}\right). \tag{7.7}$$

Функция $s \mapsto \Phi(s)$ — гладкая функция одного переменного при $s > 0$. Единственное условие состоит в сходимости интеграла (7.5).

Далее, уравнение для f_1 принимает следующий вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\, u_i = \frac{m}{(2\pi)^n}\, \Phi' \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_i}\, u_i.$$

Отсюда

$$f_1 = \frac{m}{(2\pi)^n}\, \Phi' \mathrm{W} + \alpha(u). \tag{7.8}$$

Функцию α следует выбрать из условия

$$\iint f_1\, dx\, du = 0. \tag{7.9}$$

Это означает, что при всех ε масса газа одна и та же и равна интегралу (7.5). В частности, функция α на самом деле зависит не от всех компонент скорости u_i, а только от суммы их квадратов.

Пусть решение уравнения Власова слабо сходится (по Чезаро) к плотности (7.1), причем коэффициенты f_0 и f_1 определяются соотношениями (7.7) и (7.8). Эту плотность будем рассматривать до членов порядка ε^2. Она является плотностью стационарного (равновесного) состояния. Поскольку эта функция содержит только квадраты скоростей $u_1^2, \ldots, u_n^2$, то средняя скорость v обращается в нуль. Поэтому сплошная среда в эйлеровском описании покоится. Ее плотность в конфигурационном пространстве имеет вид

$$\rho(x) = c_0 + \varepsilon c_1 \mathrm{W}(x) + o(\varepsilon),$$

где c_0 и c_1 — некоторые константы, причем $c_0 > 0$. Следовательно, при малых ε она почти постоянна.

В силу формул (7.7), (7.8) и условия (7.9) тензор напряжений

$$\mathrm{P}_{ij} = \int u_i u_j \rho^*\, du$$

шаровой: $\mathrm{P}_{ij} = \mathrm{p}\delta_{ij}$, где

$$\mathrm{p} = \int u_1^2 \rho^*\, du = \ldots = \int u_n^2 \rho^*\, du. \tag{7.10}$$

Хорошо известно, что давление на площадку с единичной нормалью w задается формулой

$$\int (u, w)^2 \rho^*\, du$$

(см. [6, 14]). С учетом формул (7.10) этот интеграл равен p. Таким образом, в состоянии статистического равновесия мы имеем соотношения идеального газа. В частности, справедлив закон Паскаля. При $\varepsilon = 0$ давление постоянно, а при малых ε оно слабо меняется от точки к точке.

В заключение этого параграфа сделаем ряд замечаний.

1°. Если в формуле (6.7) заменить K на εK и разложить правую часть в ряд по ε, то первые два члена этого разложения будут в точности определяться формулами (7.7) и (7.8) (с очевидной заменой Φ на f). Таким образом, наши рассуждения дают частичное обоснование формулы (6.7) в многомерном случае.

2°. Если в периодическом случае ядро K зависит лишь от расстояния, то функция W будет константой. Эту константу всегда можно считать равной нулю, добавляя подходящую постоянную к функции K. Действительно, замена K на K + c, $c = \text{const}$ не меняет исходное уравнение Власова. Но тогда, согласно (6.7), среди стационарных решений уравнения Власова есть функция

$$f\left(\frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{2}\right).$$

Функция одного переменного f может быть произвольной измеримой функцией; единственное условие заключается в сходимости интеграла (7.5). Это замечание контрастирует с преувеличенным вниманием к каноническому распределению Гиббса.

3°. Метод поиска стационарных решений кинетического уравнения Власова в виде ряда по степеням малого параметра является обобщением известного метода Пуанкаре, связанного с отысканием первых интегралов уравнений Гамильтона, мало отличающихся от вполне интегрируемых уравнений (см. [21, 22]).

8. Моделирование турбулентности

Возникновение турбулентности обычно связывают с потерей устойчивости ламинарного течения при больших числах Рейнольдса. С другой стороны, для описания турбулентных течений используют уравнения Навье–Стокса с дополнительными операциями усреднения и замыкания. Однако эти новые предположения столь существенны, что про классическую гидродинамику ламинарных течений можно попросту забыть.

С физической точки зрения, для изучения турбулентности более предпочтительным и фундаментальным является подход, основанный на использовании кинетических уравнений. Считается, что сами гидродинамические уравнения (в том числе с вязкостью) можно получить методами статистической механики. Прямое использование кинетических уравнений типа Больцмана для моделирования турбулентных потоков уже не является чем-то необычным. В [23] для этих целей используется кинетическое уравнение Каца. Правда, Уленбек назвал модель Каца карикатурой настоящего газа. Мы будем использовать как исходный пункт уравнение Власова.

Ключевым моментом теории турбулентности является потеря устойчивости однородного течения, когда все частицы движутся прямолинейно с постоянной скоростью. С молекулярно-кинетической точки зрения, неустойчивость таких течений означает образование отдельных молекулярных кластеров. Мы исследуем задачу об устойчивости одномерного однородного движения, понимая, конечно, что эта ситуация является модельной.

Вообще, можно ли говорить об одномерной турбулентности? Если рассматривается несжимаемая жидкость, то ответ, разумеется, отрицательный. Наоборот, одномерные течения сжимаемой жидкости или газа могут терять устойчивость: возможны заметные флуктуации скорости и плотности.

В развиваемой теории, основанной на кинетическом уравнении Власова, условие устойчивости зависит от свойства потенциала взаимодействия между частицами. Сначала рассмотрим более простой случай, когда континуум взаимодействующих частиц равномерно вращается по окружности.

Итак, пусть конфигурационным пространством будет окружность $\{x \bmod 2\pi\}$, а потенциал $\mathrm{K}(x,y)$ — четная периодическая функция от разности $x-y$. Переходя в подвижную систему отсчета, равномерно вращающуюся с угловой скоростью, равной угловой скорости исследуемого равномерного вращения, сведем рассматриваемую задачу к задаче об устойчивости равновесного однородного состояния, когда плотность среды постоянна.

Для ее решения воспользуемся энергетическим критерием Лагранжа–Дирихле: равновесие устойчиво тогда и только тогда, когда в этом равновесии потенциальная энергия (4.4) имеет строгий минимум. Этот принцип мы уже использовали в § 4 для частной задачи, когда $\mathrm{K}(z)=\delta(z)$. В точном смысле строгого минимума здесь быть не может, поскольку положения равновесия, которые получаются друг из друга поворотами окружности, образуют целое однопараметрическое семейство. Однако эта трудность легко преодолевается выбором возмущений.

Пусть
$$\rho(x,t)=\rho_0+\xi(x,t), \quad \rho_0=\mathrm{const}>0,$$
а ξ — возмущение плотности. Будем исходить из предположения, что суммарная масса не варьируется:
$$\int\limits_0^{2\pi}\xi(x,t)\,dx=0. \tag{8.1}$$

Далее,
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\iint(\rho_0+\xi(x,t))(\rho_0+\xi(y,t))\mathrm{K}(x-y)\,dx\,dy=\\&=\frac{\rho_0^2}{2}\iint\mathrm{K}\,dx\,dy+\frac{\rho_0}{2}\iint(\xi(x,t)+\xi(y,t))\mathrm{K}(x-y)\,dx\,dy+\\&+\frac{1}{2}\iint\xi(x,t)\xi(y,t)\mathrm{K}(x-y)\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{8.2}$$
Первое слагаемое равно нулю ввиду тождества (2.13), а второе также обнуляется ввиду (2.13) и предположения (8.1).

Разложим потенциал K в ряд Фурье:
$$\mathrm{K}(x-y)=\sum k_n e^{in(x-y)}.$$
Поскольку $\mathrm{K}(\cdot)$ — четная функция, то все k_n — вещественные числа. Далее, пусть
$$\xi(x,t)=\sum{}'\,\xi_{\mathrm{p}}(t)e^{i\mathrm{p}x}, \quad \xi(y,t)=\sum{}'\,\xi_{\mathrm{p}}(t)e^{i\mathrm{p}y}.$$
Штрих означает пропуск слагаемого с $\mathrm{p}=0$ (ввиду предположения (8.1)). Тогда вторая вариация потенциальной энергии (третье слагаемое в (8.2)) равна
$$\sum{}'\,k_m\xi_m\overline{\xi}_m.$$
Поскольку $\xi_m\overline{\xi}_m\geqslant 0$, то критерий положительной определенности второй вариации сводится к бесконечной серии неравенств
$$k_m>0, \quad m\neq 0. \tag{8.3}$$

Подчеркнем, что знак «свободной» постоянной k_0 не имеет значения. Впрочем, это очевидно с самого начала: потенциал определен с точностью до аддитивной составляющей.

Если $k_{\text{p}} < 0$, то возмущение p-ой моды будет экспоненциально быстро нарастать со временем. Если же $k_{\text{p}} = 0$, то условие (8.3) также нарушается. Однако p-ая мода может лишь линейно расти со временем. Правда, этот вывод справедлив только для линеаризованных уравнений движения.

Пример 3. Положим

$$\mathrm{K} = \sin^2(x - y). \tag{8.4}$$

Тогда

$$\mathrm{K}(z) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2z}{2},$$

и поэтому условие (8.3) нарушается: вторая мода экспоненциально нарастает.

Если у потенциала (8.4) поменять знак, то все коэффициенты Фурье в (8.3) будут неотрицательными. Это еще не означает наличие устойчивости (в смысле критерия Лагранжа–Дирихле), но во всяком случае неустойчивость не будет иметь «взрывной характер».

Рассмотрим теперь более «реалистическую» задачу об устойчивости одномерного течения однородного континуума частиц по прямой. При анализе условий устойчивости ряды Фурье следует заменить интегралами Фурье, принимая дополнительные меры предосторожности.

Полагаем снова

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \xi(x,t), \quad \rho_0 = \mathrm{const} > 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x,t)\,dx = 0. \tag{8.5}$$

Потенциальную энергию снова можно представить в виде (8.2). Первое слагаемое в (8.2), как правило, обращается в бесконечность. Но здесь нет ничего «трагического» по следующим причинам.

1°. Вычитая из потенциала K подходящую константу, часто можно добиться того, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K}(z)\,dz = 0.$$

Тогда первое слагаемое в (8.2) также равно нулю.

2°. В конечном счете нас интересует не потенциал, а суммарная сила. Поэтому аддитивное слагаемое в выражении для потенциальной энергии не играет никакой роли.

Укажем условия, при которых второе слагаемое в (8.2) обращается в нуль. Положим

$$\widehat{\xi}(x,t) = \int_0^x \xi(x,t)\,dx.$$

Ввиду сходимости несобственного интеграла (8.5), $\widehat{\xi}(x,t)$ стремится к некоторым константам при $x \to \pm\infty$. Далее,

$$\begin{gathered}
\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x,t)\mathrm{K}(x-y)\,dx = \mathrm{K}(x-y)\widehat{\xi}(x,t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K}'_x\widehat{\xi}(x,t)\,dx,\\
\int_{-\infty}^{\infty} \xi(y,t)\mathrm{K}(x-y)\,dy = \mathrm{K}(x-y)\widehat{\xi}(y,t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K}'_y\widehat{\xi}(y,t)\,dy.
\end{gathered} \tag{8.6}$$

Будем предполагать, что потенциал взаимодействия K стремится к нулю на бесконечности. Тогда внеинтегральные слагаемые в (8.6) равны нулю. Остается применить простое тождество (2.13).

Таким образом, экстремальные свойства суммарной потенциальной энергии W определяются третьим слагаемым в (8.2). Положим

$$\mathrm{K}(x-y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\lambda)e^{i\lambda(x-y)}\,d\lambda. \tag{8.7}$$

Поскольку функция $\mathrm{K}(\cdot)$ принимает вещественные значения и четная, то $k(\lambda)=k(-\lambda)=$ $=\overline{k}(\lambda)$. Следовательно, все величины $k(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, также вещественны.

Далее,

$$\begin{aligned}&\iint\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\lambda)e^{i\lambda(x-y)}\,d\lambda\right]\xi(x,t)\xi(y,t)\,dx\,dy=\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\lambda)\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi(x,t)e^{i\lambda x}\,dx\right]\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi(y,t)e^{-i\lambda y}\,dy\right]d\lambda=\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\lambda)\eta(-\lambda,t)\eta(\lambda,t)\,d\lambda,\end{aligned}$$

где η — обратное преобразование Фурье функции ξ. Ясно, что $\eta(-\lambda)=\overline{\eta}(\lambda)$ и $\eta\overline{\eta}\geqslant 0$. Согласно (8.5), $\eta|_{\lambda=0}=0$.

Таким образом, вторая вариация суммарной потенциальной энергии положительно определена в классе вариаций, удовлетворяющих (8.5), в том и только том случае, когда

$$k(\lambda)>0,\quad \lambda\neq 0. \tag{8.8}$$

Пример 4. Положим снова $\mathrm{K}(z)=\delta(z)$. Тогда

$$k(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(z)e^{-i\lambda z}\,dz=1.$$

Следовательно, условие (8.8) заведомо выполнено, что влечет за собой устойчивость течения. Впрочем, этот результат был получен в § 4 прямыми вычислениями.

Пример 5. Рассмотрим вопрос об устойчивости однородного континуума гравитирующих частиц на прямой. Потенциал задается формулой

$$\mathrm{K}(z)=-\frac{\gamma}{|z|},\quad \gamma=\mathrm{const}>0. \tag{8.9}$$

К сожалению, в этом случае преобразование Фурье (8.7) не определено ввиду расходимости несобственного интеграла из-за сингулярности потенциала.

Здесь можно рассуждать следующим образом. Поскольку на сверхмалых расстояниях закон Ньютона не действует (вообще есть сомнения в непрерывности пространства на таких расстояниях), то заменим значения потенциала (8.9) в малом интервале $|z|<\varepsilon$ большой константой $-\gamma/\varepsilon$. После этого формула (8.7) станет корректной, причем значения функции $k(\lambda)$

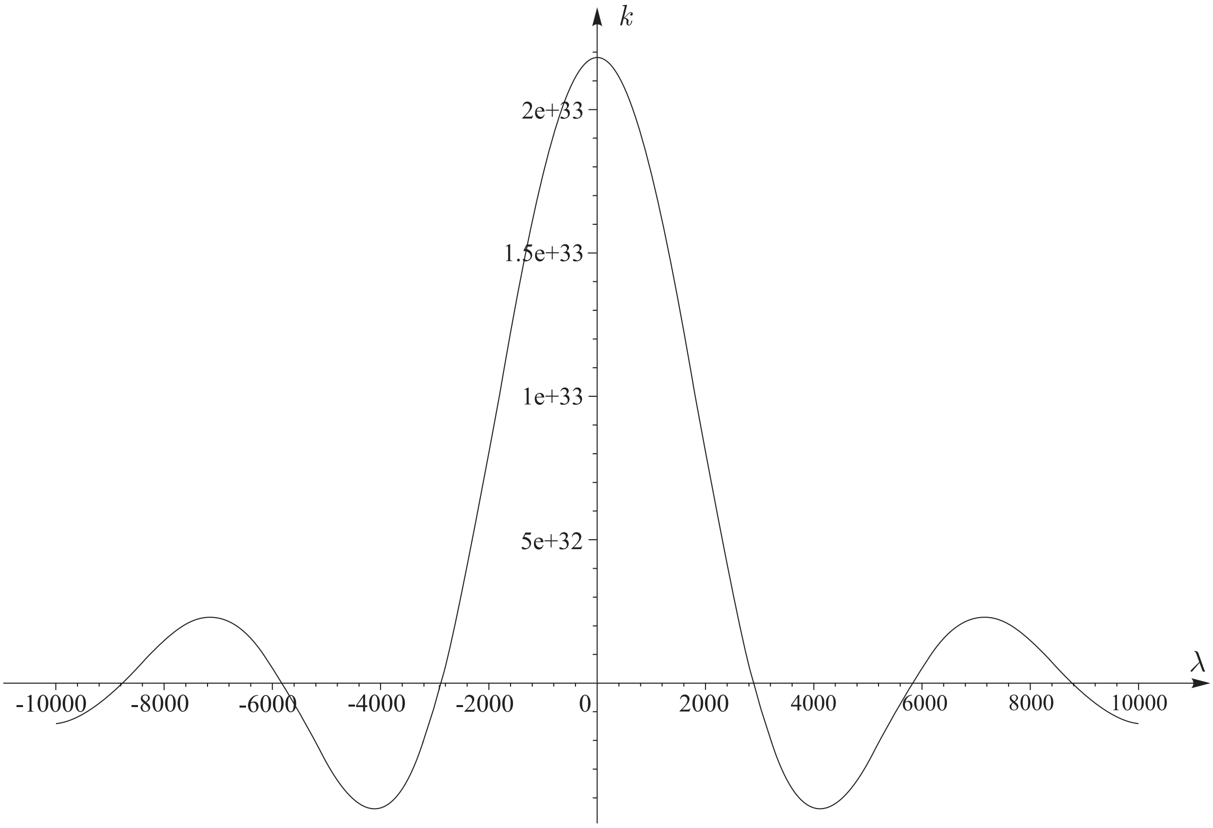

Рис. 1

будут заведомо отрицательными в интервале $|\lambda| < \varepsilon_0/\varepsilon$, где ε_0 — некоторая положительная постоянная. При уменьшении ε интервал отрицательности будет увеличиваться, что свидетельствует о сильной неустойчивости гравитирующего однородного континуума. Это рассуждение, конечно, нельзя считать вполне строгим. Однако надо иметь в виду, что задача о разрешимости уравнения Власова с потенциалом (8.9) во всем пространстве вообще остается пока открытой (ср. с [24, 25]).

Явление неустойчивости самогравитирующих континуумов хорошо известно (см., например, обзор [26] и имеющиеся там ссылки). Имеется даже термин *гравитационная турбулентность*. Правда, при обосновании неустойчивости обычно используют феноменологические уравнения сплошной среды (к тому же, как правило, упрощенные) с учетом гравитационного взаимодействия отдельных частей. Как уже отмечалось в § 2, эти уравнения отличаются от точных уравнений движения сплошной среды, эволюция которой описывается кинетическим уравнением Власова.

Пример 6. Положим

$$\mathrm{K}(z) = \frac{c}{|z|^\alpha},$$

$c = \mathrm{const} \neq 0$, $0 < \alpha < 1$. Этот потенциал также имеет сингулярность в нуле, но в отличие от гравитации обратное преобразование Фурье (8.7) корректно определено. Имеем

$$k(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{|z|^\alpha} e^{-i\lambda z}\,dz = c\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda z}{|z|^\alpha}\,dz = \frac{c}{|\lambda|^\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{|x|^\alpha}\,dx,$$

где $\beta = 1-\alpha$. В последнем равенстве использовалась четность функции $k(\cdot)$. Интеграл справа положителен. Следовательно, при $c > 0$ (отталкивание) имеем устойчивость, а при $c < 0$ (притяжение), наоборот, неустойчивость. Поскольку $0 < \beta < 1$, то преобразование Фурье функции $k(\cdot)$ также корректно определено.

Пример 7. В действительности молекулы сильно отталкиваются на малых расстояниях и притягиваются, находясь на значительном расстоянии друг от друга. Хорошей общепринятой моделью служит потенциал Леннарда-Джонса:

$$\mathrm{K}(z) = \frac{a}{z^{12}} - \frac{b}{z^6}, \tag{8.10}$$

где a и b — некоторые подходящие константы. Конечно, для такого потенциала не определено представление Фурье. Будем действовать, как в примере 5: в интервале $|z| < \varepsilon$ положим $\mathrm{K}(z) = a\varepsilon^{-12} - b\varepsilon^{-6}$, а затем будем стремить ε к нулю.

На рисунке приведен график функции $k(\cdot)$ при $\varepsilon = 0.001$ для значений $a = b = 1$. Видно, что в большом интервале частот (порядка 3 000) эта функция положительна. Можно показать, что при дальнейшем уменьшении ε диапазон положительности расширяется и при $\varepsilon \to 0$ он «покрывает» всю ось частот $\mathbb{R} = \{\lambda\}$. При малых, но фиксированных ε всегда есть зоны отрицательности функции k. Это означает появление неустойчивости при высокочастотных возмущениях. Однако с прагматической точки зрения, учитывающей приближенный смысл потенциала взаимодействия, равновесное состояние однородного континуума Леннарда-Джонса следует считать устойчивым.

Автор благодарен О. Мохову за сделанные замечания.

Список литературы

[1] Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.–Л.: Гостехиздат, 1946. 120 с.

[2] Uhlenbeck G. E., Ford G. W. Lectures in statistical mechanics. Providence, RI: AMS, 1963. 181 p.

[3] Четверушкин Б. Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс, 2004. 332 с.

[4] Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: Наука, 1967. 176 с.

[5] Власов А. А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.

[6] Веденяпин В. В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001. 112 с.

[7] Maslov V. P. Equations of the self-consistent field // J. Soviet Math., 1979, vol. 11, pp. 123–195.

[8] Dobrushin R. L. Vlasov equations // Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1979, vol. 13, no. 2, pp. 48–58 [Funct. Anal. Appl., 1979, vol. 13, no. 2, pp. 115–123].

[9] Арсеньев А. А. Существование обобщенных решений уравнения Власова // Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1985, т. 5, № 1, с. 80–87.

[10] Kozlov V. V. The generalized Vlasov kinetic equation // Russian Math. Surveys, 2008, vol. 63, no. 4, pp. 691–726.

[11] Benney D. J. Some properties of long nonlinear waves // Studies in Applied Mathematics, 1973, vol. 52, no. 1, pp. 45–50.

[12] Захаров В. Е. Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функц. анализ и его прил., 1980, т. 14, вып. 2, с. 15–24.

[13] Gibbons J. Collisionless Boltzmann equations and integrable moment equations // Phys. D, 1981, vol. 3, pp. 503–511.

[14] Lebedev D. R., Manin Yu. I. Conservation laws and Lax representation for Benney's long wave equation // Phys. Let. A, 1979, vol. 74, pp. 154–156.

[15] Gibbons J., Tsarev S. P. Reductions of the Benney equations // Phys. Let. A, 1996, vol. 211, pp. 19–24.

[16] Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматлит, 1961. 310 с.

[17] Poincaré H. Figures d'équilibre d'une masse fluide. Paris: Gauthier-Villars, 1902. 210 p.

[18] Poincaré H. Réfflexions sur la théorie cinétique des gaz // J. Phys. théoret. et appl., sér. 4, 1906, vol. 5, pp. 369–403.

[19] Kozlov V. V. Kinetics of collisionless continuous medium // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 235–251.

[20] Kozlov V. V. Notes on diffusion in collisionless medium // Regul. Chaotic Dyn., 2004, vol. 9, no. 1, pp. 29–34.

[21] Похожаев С. И. О стационарных решениях уравнений Власова – Пуассона // Дифференц. уравнения, 2010, т. 46, № 4, с. 527–534.

[22] Batt J., Faltenbacher W., Horst E. Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics // Arch. Ration. Mech. Anal., 1986, vol. 93, no. 2, pp. 159–183.

[23] Batt J., Berestycki H., Decond P., Pertname B. Some families of solutions of the Vlasov–Poisson system // Arch. Ration. Mech. Anal., 1988, vol. 104, no. 1, pp. 79–103.

[24] Веденяпин В. В. О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача // Докл. РАН. Сер. Матем., 1992, т. 323, № 6, с. 1004–1006.

[25] Carleman T. Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. Upsala: Almqvist & Wiksells, 1957. 112 p. [Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М.: Изд-во иностр. литер., 1960. 120 с.]

[26] Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, t. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1892. 385 p.

[27] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та. 1995. 429 с. [Kozlov V. V. Symmetries, topology, and resonances in Hamiltonian mechanics. Berlin: Springer, 1995. 378 p.]

[28] Белоцерковский О. М., Фимин Н. Н., Чечеткин В. М. Применение уравнения Каца к моделированию турбулентности // Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 2010, т. 50, № 3, с. 575–584.

[29] Pfaffelmoser K. Global classical solutions of the Vlasov–Poisson system in three dimensions for general initial data // J. Differential Equations, 1992, vol. 95, no. 2, p. 281–303.

[30] Lions P. L., Perthame B. Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov – Poisson system // Invent. Math., 1991, vol. 105, no. 2, p. 415–430.

[31] Фридман А. М. Предсказание и открытие новых структур в спиральных галактиках // УФН, 2007, т. 177, № 2, с. 121–148 [Physics–Uspekhi, 2007, vol. 50, no. 2, pp. 115–139].