

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА BULLETIN of MOSCOW UNIVERSITY

№ 3—4 ★ 1946 г.

Профessor A. A. ВЛАСОВ

К ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ И ТЕОРИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА*

Коллективные взаимодействия, дальние пространственно-временные связи, процессы, не укладывающиеся в обычные рамки задачи Коши

(Ответ В. Гинзбург, Л. Ландау, М. Леонович, В. Фок)**.

1. Новое уравнение.
2. Проблема обоснования.
3. Особенности метода «самосогласованного поля»: а) отличие от «обычных» методов, б) непосредственная связь между «микро» и «макро».
4. Не-борновский кристалл: а) низкие температуры, б) высокие температуры, в) промежуточные температуры.
5. Задача Коши, ее решения, особенности и следствия.
6. Теория нового типа временных физических процессов, не укладывающихся в рамки задачи Коши.
7. Заключение.

§ 1. НОВОЕ УРАВНЕНИЕ

В статьях [1, 2, 3] для понимания физических процессов в системах, состоящих из многих частиц, было предложено новое уравнение.

Объединяя результат статей [1] и [2] и делая дальнейший шаг (добавляя определенное число нелинейных функционалов), запишем здесь уравнение:

а) Для системы N одинаковых частиц, взаимодействующих электродинамически, а также одновременно с произвольным центральным законом сил взаимодействия:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \operatorname{div} \bar{v} f + (N-1) \operatorname{div}_{\bar{v}} \frac{1}{m} \left\{ -\operatorname{grad} V + e \left(\bar{e} + \frac{1}{c} [\bar{v} \bar{h}] \right) \right\} f = 0 \quad (1)$$

(уравнение непрерывности в пространстве шести измерений);

$$\begin{aligned} V(\bar{r}) = & \int K_{01} \rho(1) d\bar{r}_1 + \int \int K_{012} \rho(1) \rho(2) d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 + \dots \\ & \dots + \int \dots \int K_{012\dots N-1} \rho(1) \dots \rho(N-1) d\bar{r}_1 \dots d\bar{r}_{N-1} \end{aligned} \quad (1)$$

(ряд Тейлора—Вольтерра [4] для функционалов, оборванный на $(N-1)$ члене), где $f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$ —функция распределения для какой-либо одной частицы ансамбля, нормированная на единицу; ядра K_{01}, K_{012}, \dots зависят только от модуля расстояний между частицами, включают общее число частиц N :

$$K_{012\dots k} \sim \frac{(N-2)!}{k! (N-1-k)!},$$

* Настоящая статья печатается как дискуссионная. Ред.

** См. Журнал экспериментальной и теоретической физики, т. 16, в. 3, 1946 г. и т. 16, в. 7, 1946 г. (в дальнейшем цитируется как К).

в остальном произвольны; ρ — вероятность местоположения частицы (плотность):

$$\rho = \int f d\omega \quad (d\omega = d\zeta d\eta d\zeta);$$

\bar{e} и \bar{h} — напряженность электрических и магнитных полей, связанных с функцией распределения через посредство зарядов и токов:

$$\rho_{\text{эл}} = e \int f d\omega, \quad \bar{J}_{\text{эл}} = e \int \bar{v} f d\omega,$$

входящих в уравнение поля [1]:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \bar{h} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e \int f d\omega; \quad \text{div } \bar{e} = 4\pi e \int f d\omega \\ (\text{rot } \bar{e}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}, \quad \text{div } \bar{h} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

б) Для системы различных частиц (например, трех) с разными массами и законом сил взаимодействия, обозначая через $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ функции распределения каждой частицы порознь, уравнение имеет вид

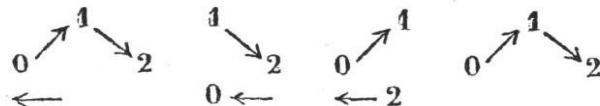
$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial f(1)}{\partial t} &= \text{div}_{\bar{r}_1} \bar{v} f(1) - \text{div}_{\bar{v}_1} \frac{1}{m_1} \left\{ (\text{grad}_{\bar{r}_1} (V_{12} + V_{13} + V_{123})) \right\} f(1) \\ V_{12}(\bar{r}_1) &= \int K_{12}(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) \rho(\bar{r}_2) d\bar{r}_2 \\ V_{13}(\bar{r}_1) &= \int K_{13}(|\bar{r}_1 - \bar{r}_3|) \rho(\bar{r}_3) d\bar{r}_3 \\ V_{123}(\bar{r}_1) &= \int \int K_{123}(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|, |\bar{r}_1 - \bar{r}_3|, |\bar{r}_2 - \bar{r}_3|) \rho(\bar{r}_2) \rho(\bar{r}_3) d\bar{r}_2 d\bar{r}_3 \\ \rho(\bar{r})_1 &= \int f(\bar{r}_1, \bar{v}_1) d\omega_1, \quad \rho(\bar{r}_2) = \int f(\bar{r}_2, \bar{v}_2) d\omega_2, \quad \rho(\bar{r}_3) = \int f(\bar{r}_3, \bar{v}_3) d\omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

для частицы номер «1» и вполне аналогичные уравнения для второй и третьей с функциями распределения $f(\bar{r}_2, \bar{v}_2)$ и $f(\bar{r}_3, \bar{v}_3)$.

1. Нелинейные функционалы учитывают, в наиболее общей феноменологической форме, неаддитивность сил молекулярного взаимодействия. Их наличие можно интерпретировать эффектами «деформации» частиц при сближении. Эти эффекты существенно зависят от числа частиц.

Так, второй член ряда Тейлора — Еольтерра, будучи зависящим только от трех разных индексов, имеет место только при наличии не менее трех частиц, третий — четырех и т. д.*. Ряд Тейлора поэтому в урав-

* Например, K_{012} учитывает взаимодействие частиц следующего типа:



не смешивать с взаимодействием в теории Мейера, Борна, Уленбека, в которой исходный гамильтониан содержит только «парные» взаимодействия. Для «элементарных» частиц вид ядер K_{01} , $K_{012}\dots$ должен быть взят из опыта, для «сложных» частиц — подлежит вычислению. Для атомов водорода в приближении Ван-дер Ваальсовых сил энергия взаимодействия трех частиц равна (вычислена Теллером [5]).

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{C_1}{r_{ij}^6} + \frac{C_2}{r_{19}^3 r_{23}^3 r_{31}^3},$$

где C_1 и C_2 — постоянные (опуская зависимость от углов).

нении (1) ограничен. Число членов этого ряда просто равно общему числу частиц без одной. Общее число частиц системы входит, таким образом, в уравнение (1) нетривиально.

Существенно подчеркнуть, что у нас нет оснований считать нелинейные функционалы присущими особо сложным частицам; наоборот, их математическая и физическая естественная природа (ряд Тейлора, взаимодействия «коллектива» частиц) указывает, что они должны иметь место и для так называемых элементарных частиц, например, протонов или нейтронов.

2. Система уравнений (1) представляет в сущности метод описания динамических свойств сред.

Эти уравнения принципиально отличаются от схемы Больцмана интегральным учетом взаимодействия между частицами и отсутствием членов с «соударениями».

Метод существенно отличается от усредненных уравнений электромагнитного поля, в которых заложена предпосылка о разделении частиц на «свободные» и «связанные». Эта предпосылка радикальна — она обуславливает введение векторов поляризации и намагничивания, гарантирующих введение констант: диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости. Излагаемый метод относится к другому крайнему случаю, где экспериментальные средства таковы, что не гарантируют строгой пространственной локализации отдельных частиц ансамбля у некоторых других.

Этот метод существенно отличается также от «микро» уравнений теории Лоренца тем, что динамическое поведение частиц описывается вероятностным, а не строго локализованным образом. В частности, это проявляется в том, что исходные уравнения не содержат известных трудностей с бесконечной собственной электростатической энергией точечных частиц.

§ 2. ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ

«Ни Власовым, ни кем-либо другим обоснование этого уравнения для короткодействующих сил и низких температур дано не было»...

«Распространение метода «самосогласованного поля» и на коротко действующие силы ведет к сшибочности результатов разбираемой работы» (К).

Проблема обоснования не может быть поставлена в общей форме для уравнения (1), так как предполагает существование более совершенной теории взаимодействий между частицами (более совершенной, чем максвелл-лоренцовская схема), которой пока не дано.

Поэтому уравнение типа (1) нужно рассматривать как уравнение, написанное из физических соображений, как обобщение частных случаев.

Для кулоновского закона сил вследствие расходности поперечника сечения [1] имеют смысл только интегральные взаимодействия.

Для сил, более быстро убывающих с расстоянием, интегральные члены опять должны иметь преобладающее значение, если внутри «сферы действия» этих сил имеется конечная вероятность пребывания хотя бы пары частиц.

Строгая постановка проблемы обоснования возможна только для частного случая — именно для совокупности частиц, взаимодействующих без запаздывания, с центральным законом сил взаимодействия; проблема сводится здесь к получению уравнения с «самосогласованным полем»*

* Только в том, хотя и важном, но все же частном случае можно говорить об основном уравнении (1), отождествляя его с методом «самосогласованного поля».

из точного уравнения статистической механики Гиббса. Это частичное обоснование и было предложено мною в работе [3]*.

Установим здесь следующее положение: уравнение типа (1) для функции распределения каждой отдельной частицы ансамбля дает приближенное решение проблемы многих тел, в статистической форме Гиббса:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= [HD] \\ H(1 \dots N) &= T + V; \quad V = \sum_{i \neq j} K_{ij} + \sum_{i \neq j \neq \sigma} K_{ij\sigma} + \dots + \sum_{i \neq j \neq \sigma \dots \neq l} K_{ij\sigma \dots l} \\ D &= D(1, 2, \dots i \dots N); \quad i \rightarrow x_i y_i z_i v_{ix} v_{iy} v_{iz} \\ [HD] &- скобки Пуассона. \\ \int \int \dots \int D(1, 2, \dots N) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N &= 1 \\ (d\tau_i = dx_i dy_i dz_i dv_{ix} dv_{iy} dv_{iz}), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где T — кинетическая энергия частиц, K_{ij} , $K_{ij\sigma} \dots$ «ядра», входящие в уравнение (1); как только функция распределения $D(1, 2, \dots N)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) достаточно быстро убывает с ростом своих аргументов; именно, требуется обращения в нуль поверхностных интегралов типа

$$\left. \begin{aligned} \int \operatorname{div}_{\bar{r}_1} \bar{v}_i D(1, 2, \dots N) d\tau_1 \dots d\tau_N \\ \int \operatorname{div}_{\bar{v}_1 m_i} \frac{1}{m_i} \bar{\nabla}_{\bar{r}} V D(1, \dots N) d\tau_1 \dots d\tau_N; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2) удовлетворяет требованию мультипликативности:

$$D(1, 2, \dots N) = f(1) f(2) \dots f(N);$$

3) требованию нормировки:

$$\int f(i) a\tau_i = 1.$$

Для случая, например, трех разных частиц (3) есть:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial f(1, 2, 3)}{\partial t} &= \operatorname{div}_{\bar{r}_1} \bar{v}_1 f(1, 2, 3) + \operatorname{div}_{\bar{r}_2} \bar{v}_2 f(1, 2, 3) + \operatorname{div}_{\bar{r}_3} \bar{v}_3 f(1, 2, 3) - \\ &- \operatorname{div}_{\bar{v}_1 m_1} \frac{1}{m_1} \bar{\nabla}_{\bar{r}_1} (K_{12} + K_{13} + K_{123}) f(1, 2, 3) - \\ &- \operatorname{div}_{\bar{v}_2 m_2} \frac{1}{m_2} \bar{\nabla}_{\bar{r}_2} (K_{21} + K_{23} + K_{123}) f(1, 2, 3) - \\ &- \operatorname{div}_{\bar{v}_3 m_3} \frac{1}{m_3} \bar{\nabla}_{\bar{r}_3} (K_{31} + K_{32} + K_{123}) f(1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Определяя индивидуальные функции распределения отдельной частицы так:

$$\begin{aligned} f(1) &= \int f(1, 2, 3) d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_3 d\bar{r}_2 d\bar{r}_3; \quad f(2) = \int f(1, 2, 3) d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_3 d\bar{r}_1 d\bar{r}_3; \\ f(3) &= \int f(1, 2, 3) d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2 d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \end{aligned}$$

* Профессор Н. Н. Боголюбов [6] в монографии — Проблемы динамической теории в статистической физике — рассмотрел и этот вопрос. Им показано, что предположение о малости сил взаимодействия между частицами (используя разложение по параметру) ведет в первом приближении к методу «самосогласованного поля». Однако, естественно, что правомерность уравнения (1) не ограничивается этим частным случаем.

и пары частиц так:

$$f(1, 2) = \int f(1, 2, 3) d\omega_3 d\bar{r}_3; \quad f(1, 3) = \int f(1, 2, 3) d\omega_2 d\bar{r}_2;$$

$$f(2, 3) = \int f(1, 2, 3) d\omega_1 d\bar{r}_1$$

и интегрируя (5) последовательно по переменным (скоростным и пространственным) пары частиц, получим для них систему уравнений, аналогичную (2), где только

$$f(1)f(2), f(1)f(3) \text{ и т. д.}$$

будет представляться $f(1, 2)$, $f(1, 3)$ и т. д. Именно имеем:

$$-\frac{\partial f(1)}{\partial t} = \operatorname{div}_{\bar{r}_1} \bar{v}_1 f(1) - \operatorname{div}_{\bar{v}_1} \frac{1}{m_1} \left\{ \int \bar{\nabla}_{\bar{r}_1} K(1, 2) f(1, 2) d\bar{r}_2 d\omega_2 - \right. \\ \left. - \int \bar{\nabla}_{\bar{r}_1} K(1, 3) f(1, 3) d\bar{r}_3 d\omega_3 - \right. \\ \left. - \int \bar{\nabla}_{\bar{r}_1} K(1, 2, 3) f(1, 2, 3) d\bar{r}_2 d\omega_2 d\bar{r}_3 d\omega_3 \right\}. \quad (6)$$

Остальные члены сводятся к поверхностным интегралам. Для $f(2)$ и $f(3)$ уравнения аналогичны.

Решения уравнения (5), удовлетворяющие следующим трем требованиям:

1. Поверхностные интегралы следующего типа (для первого уравнения системы (2)):

$$\int \operatorname{div}_{\bar{r}_2} \bar{v}_2 f(1, 2, 3) d\omega_3 d\bar{r}_2 d\omega_3 d\bar{r}_3; \quad \int \operatorname{div}_{\bar{r}_3} \bar{v}_3 f(1, 2, 3) d\omega_2 d\bar{r}_2 d\omega_3 d\bar{r}_3$$

$$\int \operatorname{div}_{\bar{v}_2} \frac{1}{m^2} \bar{\nabla}_{\bar{r}_2} (K_{21} + K_{23} + K_{123}) d\omega_3 d\bar{r}_2 d\bar{r}_3$$

$$\int \operatorname{div}_{\bar{v}_3} \frac{1}{m_3} \bar{\nabla}_{\bar{r}_3} (K_{31} + K_{32} + K_{123}) f(1, 2, 3) d\omega_2 d\bar{r}_2 d\bar{r}_3 \quad (7)$$

точно обращаются в нуль и аналогично для других уравнений системы (2).

$$2. f(1, 2, 3) = f(1)f(2)f(3) \quad (\text{требование мультипликативности}), \quad (8)$$

$$3. \int f_i(i) d\omega_i d\bar{r}_i = 1 \quad (\text{требование нормировки}) \quad (9)$$

переводят систему (6) в систему (2).

Из сопоставления (6) и (2) видим, что ограничения метода носят характер выбора определенного класса решений проблемы многих тел, для которых требуется достаточно быстрое убывание функции распределения с ростом аргументов и мультипликативность. Физическая природа этих требований не элементарна — она, повидимому, заключается в сложном взаимоотношении между средствами воздействия на изучаемые процессы и самими процессами.

Если реальны физические условия, в которых частицы не могут считаться строго локализованными в отдельных участках пространства, то можно считать, что требование мультипликативности продиктовано этими условиями.

Однако этот вопрос требует уже дальнейшей стадии понимания, и мы здесь вправе этого не касаться.

Приходим к следующему резюме:

Основное уравнение (1) применимо вне зависимости от характера закона взаимодействия между частицами (и следовательно оно законно не только для электронной плазмы, жидкости или кристалла, но может быть использовано также в теории внутриядерных процессов).

§ 3. ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА «САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ»

А. ОТЛИЧИЕ ОТ «ОБЫЧНЫХ» МЕТОДОВ.

«Применение метода «самосогласованного поля» приводит к выводам противоречащим простым и бесспорным следствиям классической статистики искающихся свойств тел при низких температурах» [К]. А именно, имеет место следующий «парадокс»: из одних и тех же предпосылок (например, Гиббса) получаются две разные формулы двумя методами — методом «самосогласованного поля» и «обычными» для величины теплового разброса атомов около узлов решетки в кристалле при низких температурах — формула (15) и формула (15а) (см. [3], а также здесь § 5). Поэтому один из путей должен быть неправильным. В этом состоит второе возражение критики.

«Парадокс» разъясняется тем, что формулы (15) и (15а) — обе законны, но относятся к разным физическим случаям. Именно формула (15а) предполагает закрепление граничных атомов цепочки, для которой она выведена. Формула же (15) свободна от указанной предпосылки. Поэтому и не удивительно, что они приводят к различным результатам.

Факт реализации «закреплений», с которыми работают «обычные» методы, в действительности принципиален.

Обычные методы статистической механики допускают, как само собой разумеющийся факт, возможность произвольной пространственной локализации отдельных частиц ансамбля. Это обстоятельство выступает например, в некоторых краевых задачах, где используются операции «закрепления» отдельных атомов (в цепочке, например, двух крайних).

Однако обычные экспериментальные средства, в которые ставится изучаемая совокупность частиц, не гарантируют подобной локализации.

Этому обстоятельству имеется соответствие в математическом аппарате, заключающееся в том, что метод «самосогласованного поля» запрещает такую локализацию.

Такова особенность тех решений проблемы многих тел, которые данный метод представляет. Этот метод соответствует другим граничным условиям, налагаемым на функцию распределения D , чем принципиально физически и математически он отличается от «обычных» методов.

Для ансамбля N одинаковых частиц функция распределения имеет вид:

$$D(1 \dots N) = f(1)f(2) \dots f(N), \quad (10)$$

где f — одна и та же функция для всех частиц ансамбля и, таким образом, невозможно, не выходя из рамок решений, представляемых методом «самосогласованного поля», задавать произвольно вид функции распределения для какой-либо одной частицы ансамбля независимо от остальных, а именно это и требуется для осуществления «закреплений» в «обычных» методах.

Таким образом, математический и физический смысл метода «самосогласованного поля» (для одинаковых частиц) запрещает локализацию отдельных частиц ансамбля.

V. НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ «МИКРО» И «МАКРО»

Метод «самосогласованного поля» порочен, так как из исходной формулы видно, что характер решения может существенно зависеть от $K(0)$ или $K''(0)$, т. е. «распределение плотности существенно зависит от характера закона взаимодействия при бесконечно малом расстоянии между частицами, что нелепо уже само по себе» [K].

Могло бы казаться, что метод «самосогласованного поля» не корректен, так как из исходного уравнения (1) с самосогласованным потенциалом

$$V(\bar{r}) = \int K(|\bar{r} - \bar{r}'|) \rho(\bar{r}') d\bar{r}' \quad (1)$$

видно, что характер решения может существенно зависеть от $K(0)$, т. е. распределение плотности («макро» характеристика) может существенно зависеть от характера закона взаимодействия при бесконечно малом расстоянии между двумя частицами («микро» характеристика), что кажется невероятным.

Но, однако, если бы эта зависимость была чувствительной, то непосредственная связь между «микро» и «макро» не являлась бы внутренним противоречивым дефектом теории, а отображала бы ее природу — таков характер теории (интегральные уравнения).

Действительное положение, однако, сложнее.

Ход «ядра» в нуле в уравнении с «самосогласованным» потенциалом (11) определяется расположением частиц не при непосредственном совпадении их центров, а в некоторой малой, но конечной окрестности, и более того, величина этой области и ход «ядра» внутри этой области, в свою очередь, зависят от «макро» величин — от распределения плотности вероятности местоположения частиц.

В самом деле, запишем потенциал на основании формулы для ряда Тейлора—Вольтерра (1) так:

$$\begin{aligned} V(\bar{r}) &= \int \left\{ K_{01} + \int K_{012} \rho(2) d\bar{r}_2 + \dots + \int \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \int K_{012\dots N-1} \rho(2) \dots \rho(N-1) d\bar{r}_2 \dots d\bar{r}_{N-1} \right\} \rho(1) d\bar{r}_1 = \\ &= \int K(|\bar{r} - \bar{r}'|) \rho(\bar{r}') d\bar{r}', \end{aligned}$$

откуда видно, что ход ядра K вблизи нуля определяется всеми последующими членами ряда Тейлора. Физически это означает, что, например, на поведение двух частиц при их сближении оказывают влияние, и все большее с уменьшением их расстояния, не «парные» взаимодействия, а «коллективные» в смысле § 1, т. е., например, третья частица (входящая в состав «тройного» взаимодействия K_{012}) и т. д.

Таким образом, для точного уравнения (1) нет проблемы. Естественно, ее не должно быть и для приближенного уравнения, для которого «самосогласованный» потенциал взят просто в виде (11), если приближение взято правильно.

Приближенность соответствует предположению независимости ядра K в (11) от ρ (линеаризация ядра), что возможно не только для достаточно больших расстояний, когда можно опустить последующие члены ряда Тейлора, ибо степень их быстроты убывания сильно возрастает с увеличением числа членов, но и для достаточно малых расстояний — в сравнении с периодом изменения ρ — и считать поэтому ρ постоянным.

Таким образом, нет оснований сомневаться в характере приближения.

Ядро приближенного уравнения с потенциалом (11) имеет вид вблизи нуля (полагая $\rho = \rho_0$):

$$K(|\bar{r} - \bar{r}'|) = K_{01} + \rho_0 \int K_{012} d\bar{r}_2 + \rho_0^2 \int \int K_{0123} d\bar{r}_2 d\bar{r}_3 + \dots \\ \dots + \rho_0^{N-2} \int \dots \int K_{01\dots N-1} d\bar{r}_2 \dots d\bar{r}_{N-1}. \quad (12)$$

В итоге получается результат:

Зависимость ядер у интегрального уравнения с самосогласованным потенциалом (11) вблизи нуля, а следовательно и решения уравнений, существенно зависит от характера закона взаимодействия коллектива частиц (совокупность интегральных членов), в котором закон взаимодействия только двух частиц играет уже сравнительно малую роль.

§ 4. НЕ-БОРНОВСКИЙ КРИСТАЛЛ

Для стационарного состояния исходное уравнение таково:

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{V(x)}{kT}}, \quad V(x) = \int K(|x - x'|) \rho(x') dx' \quad (\text{сравните с [3]}) \\ K(x) = K_{01} + \int K_{012} \rho(2) dx_2 + \dots \\ + \int \int \dots \int K_{01\dots N-1} \rho(2) \dots \rho(N-1) dx_2 \dots dx_{N-1} \quad (13)$$

(для случая одного измерения).

A. НИЗКИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ. СУЩЕСТВОВАНИЕ «РЕШЕТЧАТОГО РЕШЕНИЯ»

Асимптотическое решение при $T \rightarrow 0$ исходного уравнения

$$V(x) = \int K(|x - x'|) \rho_0 e^{-\frac{V(x')}{kT}} dx' \quad (13a)$$

легко получим, используя следующую асимптотическую формулу Лапласа (1820 г.) [7]:

$$\int_a^b \Phi(x) e^{kh(x)} dx \rightarrow \Phi(a) e^{kh(a)} \left(\frac{-\pi}{2h''(a)k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

при условии: 1) $k \rightarrow \infty$, 2) $h'(a) = 0$ и $h''(a) < 0$ (3), $h(x)$ — монотонная функция в интервале $b - a$.

Разбивая промежуток интегрирования в (13a) на участки, в которых $V(x)$ — монотонна, и требуя в узлах решетки

$$V'(nd) = 0, V''(nd) > 0, \quad (13d)$$

где d — период решетки и $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ получим:

$$V(x) = \int K(|x - x'|) \rho_0 e^{-\frac{V(x')}{kT}} dx \rightarrow 2 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K(x + nd) \left(\frac{\pi k T}{2V''(nd)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho_0 e^{-\frac{V(nd)}{kT}} \quad (14)$$

Таким образом, асимптотический ход потенциала при $T \rightarrow 0$ представляется периодической функцией с произвольным периодом d , если потребовать также $V(nd) = \text{const}$. Для плотности $\rho(x)$ получим также периодическую функцию, разложив $V(x)$ в ряд по степеням $(x - nd)$ вокруг каждого из узлов решетки:

$$\rho(x) = \sum A_n e^{-\frac{(x-nd)^2}{\alpha^2}}, \quad \alpha^2 = \frac{2kT^*}{V''(nd)}, \quad A_n = \rho_0 e^{-\frac{V(nd)}{kT}}. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) определяют «решетчатое решение» при $T \rightarrow 0$. Каковы будут решения при $T \neq 0$?

В. КРИСТАЛЛ ВБЛИЗИ ТЕМПЕРАТУРЫ ПЛАВЛЕНИЯ: СУЩЕСТВОВАНИЕ СВОЕОБРАЗНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ, НЕ ПЕРЕХОДЯЩЕЙ ПРИ $T \rightarrow 0$ В «РЕШЕТЧАТОЕ» РЕШЕНИЕ: «ЗАМОРОЖЕННЫЙ ЗВУК».

Для высоких температур $kT \gg V$ возможна линеаризация исходного уравнения (13). [3, см. § 7].

При определенном условии на температуру, плотность и силы молекулярного взаимодействия имеют место новые периодические в пространстве решения для плотности $\rho = \int \varphi d\omega$; $\varphi \ll f_0$, $f_0 + \varphi = f$.

Пространственные периоды $d = \frac{2\pi}{k}$ определяются формулой:

$$(K_+ = -K) \quad (16)$$

$$\frac{4\pi N}{kT} \int_0^\infty K_+(\rho) \frac{\sin k\rho}{k\rho} \rho^2 d\rho = 1. \quad (17)$$

«Период периодической структуры не может зависеть от температуры при заданной плотности среды, ибо он равен $\frac{1}{\sqrt[3]{N}}$, где N — число атомов в кубике,

между тем формула (17) указывает на такую зависимость» (К).

Установим:

- 1) математический и физический смысл линеаризации;
- 2) существование нескольких периодов;
- 3) практическую независимость одного из периодов от температуры;
- 4) существенную зависимость остальных от температуры при заданной плотности среды.

1. Математический смысл линеаризации. Уравнение (1) с потенциалом (11) при следующем условии на силы взаимодействия:

$$\int K(|\bar{r} - \bar{r}'|) d\bar{r}' = 4\pi \int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho = \text{const} \quad (18)$$

* В случае закрепления граничных атомов цепочки естественно (см. § 4) получим другой хорошо известный результат для величины разброса вероятности распределения атомов около положений с максимальной вероятностью (см., например, Леонтьевич. Статистическая физика. Гл. 1, § 16). Именно, для среднего квадрата смещения $|q(x)|^2$, обусловленного тепловым движением струны (длины l) в точке на расстоянии x от начала, имеет место:

$$|q(x)|^2 = \frac{kT}{a^2 l} x(l-x), \quad (15a)$$

где a — коэффициент, зависящий от упругости и плотности струны и ее сечения.

имеет тривиальное решение, соответствующее случаю равномерной плотности:

$$f = f_0(\xi, \eta, \rho), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = N,$$

где f — функция распределения, N — число частиц в кубике.

Математический смысл решения линеаризованного уравнения заключается в отыскании других решений наравне с тривиальным — задача отыскания точек разветвления решений исходного уравнения. Показано [3], что помимо тривиального решения возникает другое (периодическое) при следующем условии на концентрацию, температуру и плотность среды:

$$\frac{4\pi N}{kT} \int_0^{\infty} K_+(\rho) \rho^2 d\rho > 1 \quad (K_+ = -K). \quad (18a)$$

Это условие и определяет точку разветвления решения. Период периодической структуры определяется равенством (17), причем

$$\rho = \int \varphi d\omega = \sum_{\vec{k}} a_k e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (19)$$

где φ — малая добавка к f_0 .

Вследствие линеаризации полученное новое решение законно только вблизи точки разветвления (решение для $f_0 + \varphi$ не должно сильно отличаться от f_0). Таким образом, найденное решение и его характеристики (периоды, определяемые посредством формулы (17)) имеют место только вблизи этой точки, поэтому его абсолютно незаконно понимать как решение (периодическое) для полной плотности.

2. Физический смысл решения. Математический смысл решения диктует следующий образ: в однородной изотропной среде, как только выполняется критерий (18а), возникает на фоне равномерной плотности $\int f_0 d\omega$ малая периодическая в пространстве «рябь».

Так как не все атомы, а только малая часть из кубика ($\varphi \ll f_0$) дают происхождение «ряби», то мы не имеем права считать, что период этой «ряби» определяется формулой $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Эту «рябь» нельзя оторвать от остальной среды, поскольку решением исходного уравнения являются $f_0 + \varphi$, а не просто φ . Поэтому, вообще говоря, не удивительно, что теория приводит к зависимости величины пространственного периода не только от концентрации всей среды, но и от ее температуры. Только в старом физическом образе — выпадение решетки из однородной среды с «выпиранием» всех атомов из междоузлий решетки — этот результат непонятен. Но как раз этот образ не соответствует решению линеаризованного уравнения, так как он требует дельтообразного характера решения, которое из линеаризованного уравнения не получается и не может получиться по смыслу линеаризации.

Эта пространственная «рябь» может быть началом кристаллизации а может и не быть ею, смотря по тому, каков характер молекулярных сил взаимодействия. Именно, если силы удовлетворяют условию реализации «решетчатого» решения при $T \rightarrow 0$, т. е. имеет место (13б), то возможно говорить о начале образования кристалла. Но важно, что критерий (13б), с одной стороны, и критерии (18) и (18а) различны и не перекрывают друг друга. Таким образом, при реализации критерия (18, 18а), но невыполнении условий (13б) мы имеем дело с периодической структурой, не переходящей в кристалл.

Особенно ярко это обстоятельство проявляется для кулоновского закона сил взаимодействия, где, очевидно, ввиду монотонности закона сил решетчатое решение не реализуется, однако все же периодические решения для плотности электронного газа при определенных условиях имеют место (см. § 6 этой работы). Таким образом, новая теория приводит, в частности, к результату — к существованию и условиям возникновения периодической структуры в однородной среде, не переходящей при $T \rightarrow 0$ в кристалл (если последний именно понимать как «решетчатое» решение при $T \rightarrow 0$).

Для того чтобы:

1) отметить разницу анализируемой периодической структуры в сравнении с «решетчатым» решением;

2) выявить ее органическую связь со звуковым полем (см. далее, а также § 6),

мы хотим назвать эту структуру: «замороженным звуком».

3. Существование нескольких периодов и зависимость их от температуры. Приведем результаты численного расчета периодов кристаллической структуры и зависимости их от температуры для кристаллов из атомов благородных газов. (Проведением вычисления я обязан аспирантке Токаревой К. С. Они положены в основу ее кандидатской диссертации).

Исходной формулой служит (зависимость между ω и k в решениях типа $\exp i(\omega t \pm kx)$ для отступления плотности ρ от стационарного значения ρ_0)

$$\frac{4\pi N}{kT} \int_0^\infty K(\rho) \frac{\sin k\rho}{k\rho} \rho^2 d\rho = - \frac{1}{2 \int_0^\infty x e^{-x^2} \cos vx dx} \quad (20)$$

(«Дисперсионное уравнение» см. [1, 2], а также § 6 здесь). Формула (20) при $\omega = 0$ переходит в формулу (17) ($v = \frac{2\omega}{k_c}$).

За потенциальную функцию взаимодействия $K(\rho)$ примем следующее выражение:

$$K(\rho) = kT(1 - e^{-\frac{K_{12}}{kT}}) * \quad (21)$$

Для потенциальной энергии взаимодействия принят потенциал Ленарда-Джонса [8].

$$K_{12} = 4u \left\{ \left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right\}, \quad (22)$$

где u и r_0 — два параметра этого взаимодействия. Минимум K_{12} равен u и имеет место при $r = \sqrt[6]{2} r_0$, потенциал K_{12} равен нулю для $r = r_0$, положителен для $r < r_0$ и отрицателен для $r > r_0$.

Для аргона $r_0 = 3,408 \text{ \AA}$ и $u = 165,0 \cdot 10^{-16}$ эрг.;

Для неона $r_0 = 2,734 \text{ \AA}$ и $u = 48,81 \cdot 10^{-16}$ эрг.;

Для гелия $r_0 = 2,56 \text{ \AA}$ и $u = 14,04 \cdot 10^{-16}$ эрг.

* Обоснование этого выражения [3, § 7]. Там дано уравнение в виде

$$\frac{p_1}{m} \frac{df(1)}{dx_1} - \int \frac{dK_{12}}{dx_1} e^{-\frac{K_{12}}{kT}} \int f(2) dp_2 dx_2 \frac{df(1)}{dp_1} = 0,$$

откуда:

$$\frac{dK_{12}}{dx_1} e^{-\frac{K_{12}}{kT}} = \frac{d}{dx_1} K.$$

В безразмерных единицах подлежащее исследованию уравнение (зависимость ω^* от k^*) есть:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\int_0^\infty z \{\exp[-4\theta(z^{-12}-z^{-6})] - 1\} \frac{\sin k^* z}{k^*} dz} &= \beta \int_0^\infty x e^{-x^2} \cos vx dx; v = \frac{2\omega^*}{k^*} \\ \left(\omega^* = \frac{\omega}{c/r_0}, \quad k^* = \frac{k}{1/r_0}, \quad c = \sqrt{2kT/m}, \quad \theta = \frac{u}{kT}, \quad \beta = 8\pi N r_0^3 \right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Результат численного интегрирования системы (23) приведен на рис. 1.

1. Первое следствие. Сверхструктура. Рисунок 1 указывает, что в интервале температур

$$0,40 \leq \theta \leq 2,25 *$$

существует три периода, из которых наиболее низкий «сверхпериод» (I) существенно меняется от температуры, средний (II — «основной») не зависит от температуры и равен $d^* = 2\pi/k_2^*$, где $k_2^* \approx 5,45$, $d^* = \frac{d}{r_0}$; третий (III) зависит от температуры, но меньше, чем первый.

2. Второе следствие. «Бегущие периоды». Помимо существования «сверх-периодов» и зависимости их от температуры, «новый кристалл» характеризуется определенной периодической структурой, не совпадающей со стационарным значением периодов (при $\omega = 0$). Именно на дисперсионной кривой возникает при определенной температуре новая петля, типа эллипса, площадь которого увеличивается с понижением температуры (отмечен на рис. 1: Б. К.). Так как этот овал не пересекает ось k , он представляет периодические решения для плотности

Рис. 1. Дисперсионные кривые для кристалла.

$(\exp i(\omega t \pm kx), \omega \neq 0, k \neq 0)$, характерным для которых является наличие отличной от нуля фазовой скорости перемещения $v = \frac{\omega}{k} \neq 0$; таким образом этот тип периодической структуры реализуется только в движении (этот класс периодических решений назовем «бегущими» периодами).

3. Третье следствие. Кривая фазового перехода. Для разных периодов существует несколько разная критическая температура их появления. Если отождествлять наблюдаемую температуру плавления с критической температурой, при которой появляется или исчезает основной период (не зависящий от температуры), мы получим кривую фазового перехода на плоскости $\frac{kT}{u} = \frac{1}{\theta}$ и $\beta = 8\pi N r_0^3$ (температура и плотность).

* Температура кристаллизации для аргона соответствует $\theta = 1,47$; для неона $\theta = 1,43$.

Существование этой кривой указывает на кристаллизацию не при одном значении температуры и плотности, а на всей кривой. Выше этой кривой нет периодических решений. Для значений температур и плотностей, лежащих ниже, кристаллическое состояние реализуется.

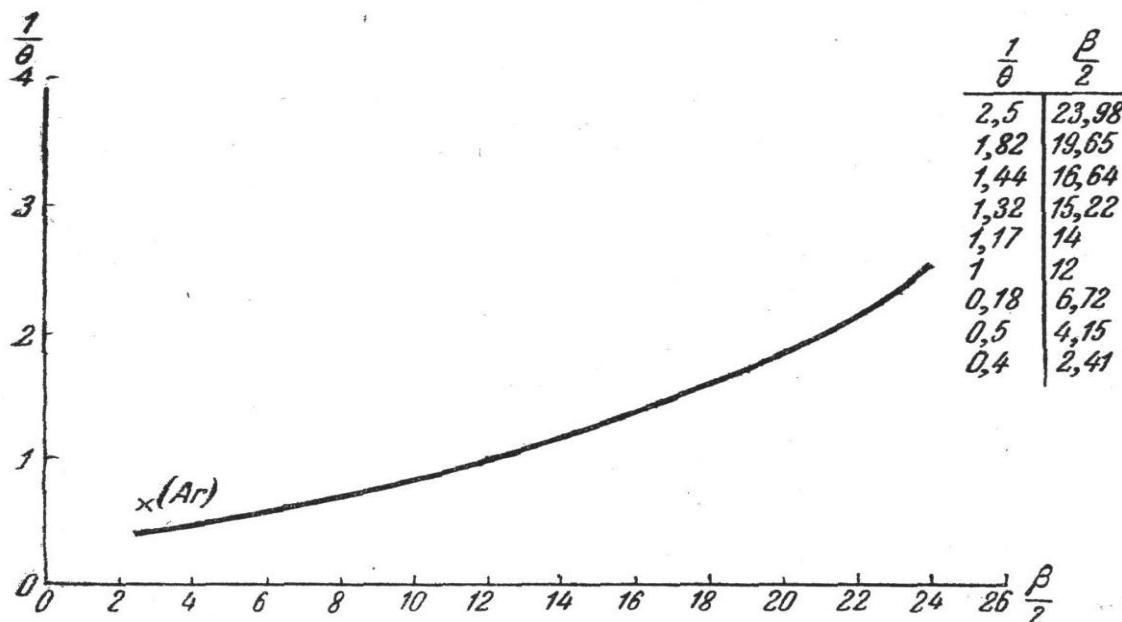


Рис. 2. Кривая фазового перехода газ—кристалл.

Эта кривая определяется формулой (знак равенства):

$$\min \int_0^\infty \frac{1}{z \{ \exp [-4\theta(z^{-12} - z^{-6})] - 1 \} \frac{\sin k^* z}{k^*}} dz = \left\{ \begin{array}{l} < \quad \text{(<) периодические решения есть} \\ > \quad \text{(>) нет периодических решений} \end{array} \right\} 4\pi N r_0^3 \quad (24)$$

где $\frac{2\pi}{k^*}$ — основной период (на рис. 1 $k^* = k_2$).

На рис. 2 сплошной линией нанесена теоретическая кривая зависимости $\frac{1}{\theta}$ от $4\pi N r_0^3 = \frac{\beta}{2}$. Экспериментальные значения этих величин нам известны в литературе только для аргона. Разница теоретических и опытных значений составляет для аргона 15—20%.

Трудно ожидать лучшего согласия, если учесть приближенность формулы для ядра (21), а также (22).

4. Выход теории в эксперимент. Желательно экспериментальное исследование кристаллов из атомов благородных газов для установления следующих следствий в области температур, близких к температуре плавления:

1) существование «сверхпериодов» (I) и (III); 2) зависимость их от температуры; 3) существование «бегущих периодов»; 4) уточнение кривой фазового перехода.

Значения функции в формуле (24):

$$J(k) = 1 / \int_0^\infty z \{ \exp [-4\theta(z^{-12} - z^{-6})] - 1 \} \frac{\sin k^* z}{k^*} dz,$$

полученные численным интегрированием, даны в таблице 1. В таблице 2 приведены численные значения θ при различных значениях k .

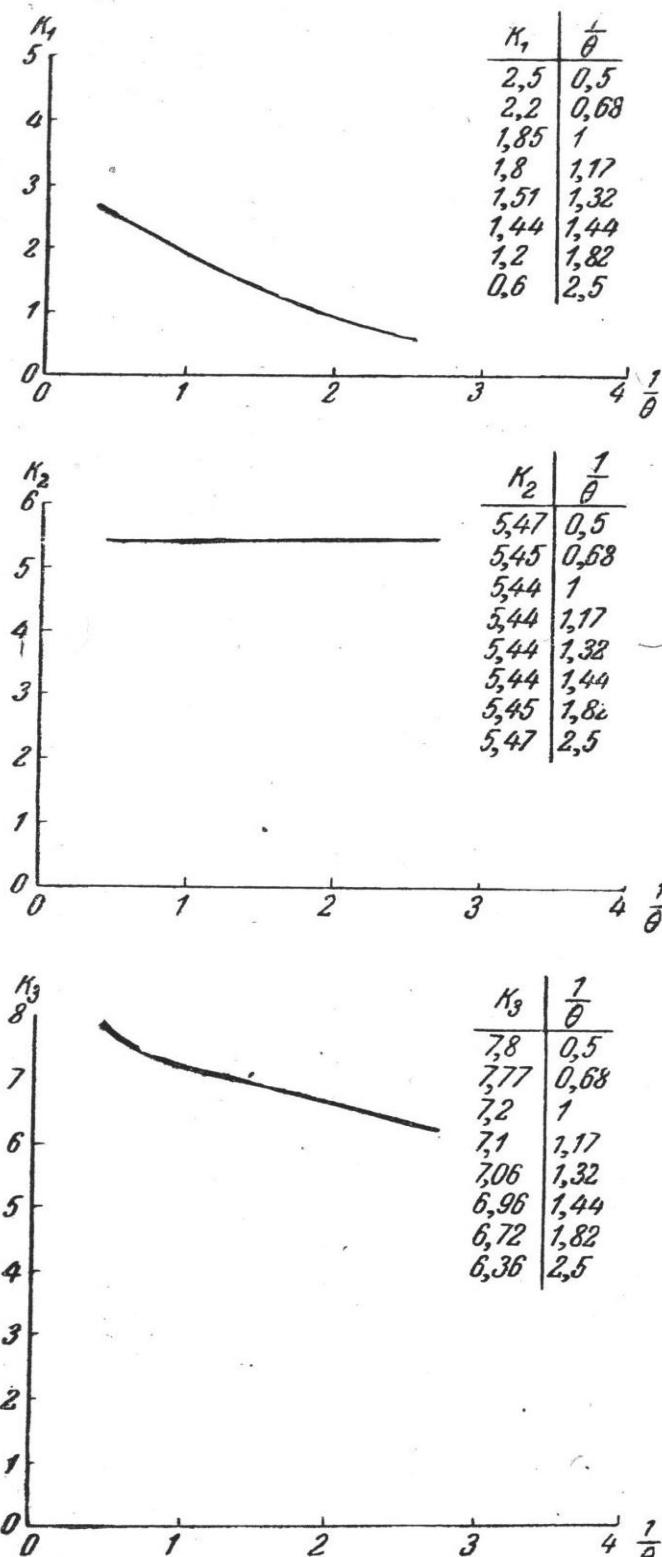


Рис. 3. Зависимость периодов от температуры.

С. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ТЕМПЕРАТУРЫ. НАРУШЕНИЕ СТРОГОЙ ПЕРИОДИЧНОСТИ В ИДЕАЛЬНОМ КРИСТАЛЛЕ — ПОЯВЛЕНИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

При $T \rightarrow 0$ асимптотический ход решения для потенциала и плотности приводит к чисто периодическим решениям в виде «решетчатого» решения.

С ростом температуры помимо «раз мазывания» максимумов вероятности нахождения частиц в узлах решетки не появляются линовые решения? Рассмотрим эту проблему.

Математически задача сводится к отысканию точек разветвления решений уравнения (13) и определения характера новых решений при увеличении параметра T .

Полагая $V = V_0 + \delta V$, где V_0 есть решение (13), которое будем считать известным, для определения $\delta V = u$ имеем исходное уравнение (для случая одного измерения):

$$V(x) = \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} K(|x - x'|) e^{-\frac{V(x')}{kT}} dx', \quad (25)$$

откуда (уравнение для «вариаций»)

$$V_0(x) + u(x) = \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} K(|x - x'|) e^{-\frac{V_0(x')}{kT}} \left(1 - \frac{u}{kT} + \dots \right) dx'$$

или

$$\begin{aligned} u(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(|x - x'|) e^{-\frac{V_0(x')}{kT}} u(x') dx' &= \\ &= V_0(x) - \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} K(|x - x'|) e^{-\frac{V_0(x')}{kT}} dx' + O(u^2). \end{aligned}$$

Таблица значений функции $I(k)$

k	$\theta - 25$	$\theta - 2$	$\theta - 1,47$	$\theta - 1$	$\theta - 0,85$	$\theta - 0,754$	$\theta - 0,695$	$\theta - 0,55$	$\theta - 0,40$
	$I(k)$	$I(k)$	$I(k)$	$I(k)$	$I(k)$	$I(k)$	$I(k)$	$I(k)$	$I(k)$
0,00	0,199	0,487	1,019	1,182	1,577	1,968	2,269	3,710	5,597
0,50	0,225	0,379	0,692	1,389	2,346	2,822	4,892	16,313	—
1,00	0,285	0,503	0,710	2,188	3,131	4,200	4,990	12,345	—48,309
1,50	0,433	0,791	1,746	5,731	10,504	21,413	52,356	—22,573	— 9,901
2,00	1,052	2,049	6,498	—19,379	—12,034	— 9,852	— 8,977	— 7,490	— 6,527
2,50	10,526	—7,600	—6,116	— 5,181	— 5,333	— 5,415	— 5,435	— 5,669	— 5,910
3,00	—1,597	—2,099	—3,071	— 4,242	— 4,606	— 4,933	— 5,139	— 5,738	— 6,464
3,50	—1,138	—1,704	—2,885	— 4,560	— 5,266	— 5,827	— 6,161	— 7,174	— 8,467
4,00	—1,245	—2,119	—5,593	— 6,640	— 7,886	— 8,873	— 9,533	—11,468	—14,265
4,50	—1,782	—3,353	—9,560	—17,545	—18,726	—21,791	—24,038	—30,030	—38,610
5,00	—3,413	—13,869	—58,479	104,187	90,090	86,207	85,470	99,009	100,000
5,50	8,695	12,391	12,484	16,184	18,518	20,325	21,336	25,063	30,120
6,00	3,311	4,233	7,379	11,933	13,986	15,823	16,639	19,646	23,981
6,50	2,304	4,152	6,720	12,740	15,037	16,778	17,790	22,124	26,316
7,00	3,134	6,173	13,106	18,484	24,930	24,038	26,177	30,864	36,765
7,50	4,629	11,709	19,436	48,165	54,054	59,880	62,893	71,428	—
8,00	12,345	27,933	92,592	—102,041	—142,857	—169,491	—192,308	—294,117	—
8,50	—8,196	—11,534	—35,842	— 33,333	— 41,152	— 46,296	— 51,843	— 66,667	—
9,00	—0,902	—11,197	—25,445	— 22,026	— 30,584	— 34,602	— 37,594	— 46,089	—

Таблица 2

Таблица значений « ω » и « k » дисперсионной кривой

0—0,55		0—0,75		0—1		0—1,47	
k	ω	k	ω	k	ω	k	ω
0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	0,78	0,5	0,83	0,2	0,34	0,5	0,88
1	1,1	1	1,56	0,5	0,85	1	1,75
1,2	0	1,2	1,78	0,8	1,36	1,5	2,52
15,2	—	1,5	0,72	1	1,66	2	2,96
2,08	6,20	1,51	0	1,4	2,18	2,2	0
2,2	5,72; 7,66	2	—	1,5	2,25	2,4	—
2,4	5,95; 8,93	2,2	6,6	1,6	1,50	2,5	6,3; 9,2
2,5	6; 9,85	2,5	5,90; 9,90	1,8	0	3	6,06; 15,48
3	7,32; 11,46	3	6,84; 12,36	2	—	3,5	7,14; 17,5
3,2	8; 11,78	3,5	8,54; 13,16	2,5	5,80; 10,10	4	96; 15,68
3,44	10,32	3,7	9,77; 12,73	3	6,54; 13,20	4,24	12,72
3,5—5	—	3,8	11,4	4	10,72; 13,60	4,5—5	—
5,5	0	4—5	—	3,5	7,77; 14,91	5,4	0
5,8	3,48	5,44	0	4,06	12,18	5,5	5,94
6	3,84	5,5	3,08	4,5—5	—	6	8,64
6,5	2,73	6	5,40	5,44	0	6,5	9,42
6,72	0	6,2	5,70	5,5	4,95	7	8,35
—	—	6,5	5,46	6	6,6	7,55	4,8
—	—	7	1,4	6,5	7,02	7,8	0
—	—	7,06	0	7	5,04	—	—
—	—	—	—	7,5	0	—	—

Так как по условию $V_0(x)$ есть точное решение, то первые два члена в правой части исчезают, ограничиваясь только линейными членами в u ; имеем окончательно следующее уравнение:

$$u(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K_+ (|x - x'|) \rho_0(x') u(x') dx' = 0 \quad (26)$$

$$\left(\lambda = \frac{1}{kT}, \quad K_+ = -K, \quad \rho_0(x) = \rho_0 e^{-\frac{V_0(x)}{kT}} \right),$$

где $\rho_0(x)$ — периодическая функция x :

$$\rho_0(x) = \rho_0(x + nd), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Это уравнение является обобщением полученного нами прежде [3] для высоких температур. Его свойства, как нетрудно видеть, аналогичны уравнению Матье (дифференциальное уравнение второго порядка с периодически меняющимися параметрами, ибо для частного случая ядра вида $e^{-\alpha|x-x'|}$ оно приводится к уравнению Матье).

Установим некоторые свойства уравнения (26).

1. Периодические функции с периодом « d » суть решения уравнения (26), где d — период функции $\rho_0(x)$. В самом деле, перепишем уравнение (26) в виде:

$$u(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K_+(y) \rho_0(x-y) u(x-y) dy = 0, \quad (26a)$$

откуда видим, что наряду с некоторой функцией $u(x)$ функция $u(x) = u(x+d)$ также удовлетворяет этому уравнению.

2. Помимо периодических решений с периодом « d » интегральное уравнение (26) имеет другие решения типа:

$$u_n(x, k) = e^{i \frac{2\pi k}{d} x} \psi_n(x, k), \quad (26b)$$

где k — произвольное действительное число, а $\psi_n(x, k)$ — периодическая функция с периодом « d ».

В самом деле, подстановка (26b) в (26a) дает:

$$\psi_n(x, k) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K_+(y) e^{i \frac{2\pi k}{d} y} \rho_0(x-y) \psi_n(x-y) dy = 0, \quad (26c)$$

т. е. уравнение того же типа, как (26a), только с отличным ядром, но также зависящим от разности. Уравнение (26c) имеет, следовательно, также периодические решения с периодом « d ».

3. Спектр собственных значений λ , при данном « k » (в системе функций (26b)) дискретен.

Функции (26b) удовлетворяют условию:

$$u_n(x+d, k) = e^{i 2\pi k d} u_n(x). \quad (26d)$$

С помощью этого условия интегральное уравнение (26) приводится к интегральному уравнению с конечным промежутком интегрирования (указанием на это важное обстоятельство я обязан Ю. Л. Рабиновичу).

Представим выступающий интеграл в виде суммы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_+ (|x-x'|) \rho_0(x') u(x') dx' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(2n-1)\frac{d}{2}}^{(2n+1)\frac{d}{2}} K_+ (|x-x'|) \rho_0(x') u(x') dx'.$$

Используя условие периодичности $\rho_0(x)$ и условие (26d), имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{(2n-1)\frac{d}{2}}^{(2n+1)\frac{d}{2}} K_+ (|x-x'|) \rho_0(x') u(x') dx' = \\ & = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} K_+ (|x-nd-y|) \rho_0(y) \cdot e^{i 2\pi k n} u(y) dy. \end{aligned}$$

Следовательно, исходное уравнение приводится к виду:

$$u(x) - \lambda \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} G(x-y, k) \rho_0(y) u(y) dy = 0,$$

где

$$G(x-y, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i n k} K_+ (x-y-nd).$$

Полученное уравнение принадлежит к обычному типу интегральных уравнений Фредгольма и следовательно: каждому действительному значению k принадлежит бесконечный дискретный спектр вещественных собственных значений

$$\lambda_1(k), \lambda_2(k), \dots, \lambda_n(k) \dots,$$

непрерывно зависящих от k .

Первое свойство уравнения (26) указывает, что периодические решения имеют место не только как асимптотические при $T \rightarrow 0$, но и при $T \neq 0$.

Второе свойство, однако, указывает, что при $T \neq 0$ возникают новые решения типа:

$$u_n(x, k) = e^{i \frac{2\pi k}{d} x} \psi_n(x, k); \\ \psi_n(x, k) = \psi_n(x + d, k).$$

Период модулирующей функции равен $\frac{d}{k}$, и так как k произвольно, следовательно, период модуляции в общем случае несоизмерим с основным периодом d , и, таким образом, решения имеют характер почти периодических функций.

Кристалл, следовательно, не есть строгое периодическое явление, и теория органически содержит в себе нерегулярность его структуры.

Третье свойство указывает, что возникновение этой нерегулярности в общем имеет дискретный характер, при непрерывном изменении температуры.

Ограничимся вышеуказанным. Уравнение (26) мы еще не исчерпали и намерены это сделать позже.

§ 5. ЗАДАЧА КОШИ, ЕЕ РЕШЕНИЕ, ОСОБЕННОСТИ И СЛЕДСТВИЯ

Перейдем к рассмотрению нестационарных явлений. Временное линеаризованное уравнение таково [2,3]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{grad}_r \varphi = \\ = \frac{1}{m} \operatorname{grad}_{\bar{v}} \Phi_0 \cdot \operatorname{grad}_{\bar{r}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int K(|\bar{r} - \bar{r}'|) \varphi(\bar{r}', \bar{v}', t) d\bar{v}' d\bar{r}' = F(t, \bar{r}, \bar{v}). \quad (27)$$

Могло бы казаться, что способ решения этого уравнения путем деления некоторого выражения на нуль ввиду этого обстоятельства не корректен, однако, он применяется Дираком в его книге «Основы квантовой механики» при решении известной задачи о рассеянии в p -представлении для уравнений другого типа, но той же математической структуре [9], а также в последней работе Гейзенберга «К теории элементарных частиц» [10] и является правильным математическим приемом решения. Его недостаточность состоит в том, что он дает только частные решения (в зависимости от выбора произвольной функции λ [9]). Дирак в своей книге выбирает решение с запаздывающими потенциалами, выбо «главного значения» соответствует полусумме запаздывающих и опережающих потенциалов.

Дисперсионное уравнение, понимаемое в смысле «главного значения», соответствует выбору последнего класса решений (это было отмечено

нами, см. [2]). Понимаемое в том смысле, как в работе [1], соответствует запаздывающим потенциалам. Покажем это и одновременно дадим здесь решение уравнения (27) новым приемом *, значительно распространяющим полученные прежде результаты.

Уравнение (27) эквивалентно следующему:

$$\varphi(t, \vec{r}, \vec{v}) = \varphi(t_0, \vec{r} - \vec{v}(t - t_0), \vec{v}) + \int_{t_0}^t F(\tau, \vec{r} - \vec{v}(t - \tau), \vec{v}) d\tau, \quad (28)$$

где F — правая часть уравнения (27). Физически эквивалентность (27) и (28) очевидна; оба уравнения учитывают изменение функции распределения под влиянием только двух причин: трансляции частиц и существования «источников» этих частиц; математическая их эквивалентность легко доказуема **.

Подстановка вместо F его выражения из (27) и интегрирование по скоростям дает следующее уравнение для ρ :

$$\begin{aligned} & (\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi d\omega) \\ & \rho(\vec{r}, t) = \Psi(t_0, t, \vec{r}) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{v} \frac{1}{m} \nabla_{\vec{v}} \Phi_0 \cdot \int_{t_0}^t \nabla_r \int_{-\infty}^{+\infty} K(|\vec{r} - \vec{v}(t - \tau) - \vec{r}'|) \rho(\vec{r}', \tau) d\vec{r}' \cdot d\tau \quad (29) \\ & \Psi(t_0, t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_0, \vec{r} - \vec{v}(t - t_0), \vec{v}) d\vec{v}. \end{aligned}$$

Это уравнение и лежит в основе дальнейшего анализа. Оно указывает на некоторые качественно важные свойства систем частиц с «далекими взаимодействиями».

1. Поведение «микро» характеристик среды — функции распределения φ зависит от «макро» величин ρ . Следовательно, в предлагаемой теории нет обычного разделения на «микро» и «макро».

2. Зависимость величин в данной точке \vec{r} и t определяется поведением этих величин во всех других пространственных точках, а также в конечном или бесконечном большом промежутке времени. Следова-

* См. также последнюю главу монографии — Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения. Ученые записки МГУ, вып. 2, 1945 г. Физика. (Критика не цитирует этой основной работы).

** Уравнение (27) принадлежит к типу $\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = F$, где A — оператор, не содержащий явно времени. Формальная интеграция дает:

$$\varphi(t, \vec{r}, \dots) = e^{-A(t-t_0)} \varphi(t_0, \vec{r}, \dots) + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t)} F(\tau, \vec{r}, \dots) d\tau.$$

Смысл оператора $e^{-A(t-t_0)}$ раскрывается решением однородного уравнения, которое есть:

$$\varphi(t, \vec{r}, \dots) = \varphi(t_0, \vec{r} - \vec{v}(t - t_0), \dots),$$

т. е. соответствует сдвигу функции от точки с координатами t, \vec{r}, \vec{v} в точку $t_0, \vec{r} - \vec{v}(t - t_0), \vec{v}$ (свободная трансляция частиц).

тельно, связи между величинами имеют четырехмерный функциональный характер.

Задача Коши. Пусть при $t = t_0$ задана функция распределения φ , например, так:

$$\varphi(t_0, \bar{r} - \bar{v}(t - t_0), \bar{v}) = \sum_k a_k e^{i\bar{k}\bar{r}} \Phi_0(\xi, \eta, \zeta), \quad (29a)$$

где Φ_0 — невозмущенная функция распределения.

Решение уравнения (29) ищем в виде:

$$\rho(\bar{r}, t) = \sum_{\bar{k}} q_{\bar{k}}(t) e^{i\bar{k}\bar{r}}. \quad (29b)$$

Подстановка (29a) и (29b) приводит, если предположить, что функции $\Phi_0(\bar{v})$ и $q_{\bar{k}}(t)$ удовлетворяют условиям перестановки пределов интегрирования по \bar{v} и τ , следующее уравнение типа Вольтерра для определения амплитуд $q_{\bar{k}}(t)$ как функций времени:

$$q_{\bar{k}}(t) = F_{\bar{k}}(t) + \int_{t_0}^t G_{\bar{k}}(t - \tau) q_{\bar{k}}(\tau) d\tau, \quad (30)$$

где

$$F_{\bar{k}}(t) = a_{\bar{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\bar{k}\bar{v}t} \Phi_0(\bar{v}) d\bar{v}; \quad G_{\bar{k}}(t) = \quad (30a)$$

$$= \frac{\sigma(k)}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\bar{k}\bar{v}t} i(\bar{k} \bar{\nabla}_{\bar{v}}) \Phi_0 d\bar{v}; \quad \sigma(k) = 4\pi \int_0^{\infty} K(\rho) \frac{\sin k\rho}{k\rho} \rho^2 d\rho. \quad (30b)$$

Для максвелловской функции распределения:

$$F_{\bar{k}}(t) = a_{\bar{k}} N e^{-\frac{\hbar^2 c^2 t^2}{4}}, \quad G_{\bar{k}}(t) = -\frac{\sigma(k)}{m} k^2 t e^{-\frac{\hbar^2 c^2 t^2}{4}}, \quad c^2 = \frac{2kT}{m}.$$

Уравнение (30) указывает, что для больших времен $q_{\bar{k}}(t) \rightarrow 0$ или $q_{\bar{k}}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, так как при $t \rightarrow \infty$, $F_{\bar{k}}(t) \rightarrow 0$, а однородное уравнение Вольтерра с убывающим ядром не имеет решений в классе ограниченных и отличных от нуля на бесконечности функций, например, периодических.

Итак, имеем результат: возмущения, созданные в системе частиц с равномерной плотностью, или диффузионно рассасываются с течением времени или неограниченно возрастают.

Задача Коши не приводит, таким образом, к временным процессам в системах частиц, остающимся какое угодно длительное время неизменными. Следовательно, кристалл, например, нельзя получить, надлежаще распределяя в пространстве атомы в некоторый начальный момент времени, понижая температуру и повышая плотность. Он должен возникать поэтому другим образом, не через посредство тех физических операций, которые предполагают реализацию задачи Коши (см. § 7). Такова основная особенность этой проблемы. Задача Коши описывает временной ход процессов, имеющих необратимый характер.

Рассмотрим два следствия.

1. Вибрационно-диффузионные процессы в электронной плазме — без «столкновений».

Решение уравнения Больтерра (30) хорошо известно из теории интегральных уравнений (используется преобразование Лапласа — Меллина). Его решение изображается следующим интегралом:

$$q_{\bar{k}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt} \frac{\bar{F}_{\bar{k}}(p)}{1 - \bar{G}_{\bar{k}}(p)} dp, \quad (31)$$

где

$$\bar{F}_{\bar{k}}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F_k(t) dt \quad \text{и} \quad \bar{G}_{\bar{k}}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} G_k(t) dt. \quad (32)$$

Используя (30a) и (30b), получим:

$$\bar{F}_{\bar{k}}(p) = a_{\bar{k}} N J(p) \quad (33)$$

$$\bar{G}_{\bar{k}}(p) = \frac{\sigma(k) N}{mc^2} \{ p J(p) - 1 \}, \quad (34)$$

где

$$J(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt - k^2 c^2 t^2} dt. \quad (35)$$

Функция $J(p)$ выражается через посредство Гауссова интеграла ошибок от комплексного аргумента и таким образом сводится к следующей функции:

$$J(p) = \frac{1}{2kc} e^{\frac{p^2}{4k^2 c^2}} \left\{ \Phi\left(\frac{p}{2kc}\right) - 1 \right\}, \quad (36)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{V\pi} \int_0^x e^{-w^2} dw.$$

Таким образом подлежащий вычислению интеграл есть:

$$q_{\bar{k}}(t) = a_{\bar{k}} N \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt} \frac{J(p)}{1 - \beta(p J(p) - 1)} dp \quad (37)$$

$$\beta = \frac{\sigma(k) N}{mc^2}.$$

Этот интеграл не выражается в элементарных функциях и оценивается только приближенными методами в некоторых крайних случаях.

Проведем следующую аппроксимацию, — за исходную функцию примем:

$$\iint \Phi_0(\xi, \eta, \zeta) d\eta d\rho = f_0(\xi) = \frac{Nc}{\pi} \frac{1}{c^2 + \xi^2} \quad (38)$$

(приближенное выражение максвелловского закона распределения, спрощенное для очень больших скоростей). Для этой функции все выступающие интегралы берутся точно, и мы имеем:

$$F_{\bar{k}}(t) = a_{\bar{k}} N e^{-kct}; \quad G_{\bar{k}}(t) = -\frac{\sigma(k) N}{m} k^2 t e^{-kct}$$

$$\bar{F}_{\bar{k}}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F_{\bar{k}}(t) dt = a_{\bar{k}} N \frac{1}{p + kc};$$

$$\bar{G}_{\bar{k}}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} G_{\bar{k}}(t) dt = -\frac{\sigma(k) N}{m} k^2 \frac{1}{(p + kc)^2}. \quad (39)$$

$$(t > 0)$$

Для кулоновского закона сил

$$\frac{\sigma(k) k^2 N}{m} = \frac{4\pi N e^2}{m} = \omega_0^2$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt} \frac{p + kc}{(p + kc)^2 + \omega_0^2} dp = e^{-kct} \cos \omega_0 t$$

и таким образом окончательно

$$q_{\bar{k}}(t) = a_{\bar{k}} N e^{-kct} \cos \omega_0 t. \quad (40)$$

Итак, проблема Коши для электронной плазмы приводит в крайнем случае, когда неоднородности велики в сравнении с «дебаевским расстоянием»:

$$\frac{1}{k} \gg \frac{c}{\omega_0},$$

к вибрационному характеру изменения со временем возмущений в электронной плазме. В другом крайнем случае — градиенты пространственных неоднородностей большие: $kct \gg \omega_0$, изменение с течением времени носит чисто диффузионный характер (без «столкновений»).

2. Неустойчивость состояния с равномерной плотностью для сил притяжения.

Для сил, удовлетворяющих условию:

$$\sigma(k) = 4\pi \int_0^\infty K(\rho) \frac{\sin k\rho}{k\rho} \rho^2 d\rho < 0 \quad (41)$$

(это условие включает условие появления периодических решений, не в постановке задачи Коши), имеем по аналогии с формулой (40):

$$\frac{\sigma(k) N k^2}{m} = -\omega_1^2$$

$$q_{\bar{k}}(t) = a_{\bar{k}} N \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt} \frac{p + kc}{(p + kc)^2 - \omega_1^2} dp = a_{\bar{k}} N e^{-kct} Ch\omega_1 t. \quad (42)$$

Таким образом получаем результат: для сил, удовлетворяющих условию (41), возмущения, созданные в некоторый начальный момент в состоянии с равномерной плотностью, не рассеиваются, а возрастают с течением времени, характеризуя неустойчивость исходного состояния с равномерной плотностью.

§ 6. ТЕОРИЯ НОВОГО ТИПА ВРЕМЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, НЕ УКЛАДЫВАЮЩИХСЯ В РАМКИ ЗАДАЧИ КОШИ

С физической точки зрения задание произвольных начальных условий в динамической системе (решение задачи Коши) представляет физическую операцию, привносящую новый элемент в систему, вообще говоря, не содержащийся в тех физических принципах, на которых основаны исходные уравнения движения рассматриваемой системы.

Каковы те начальные условия, которые гарантируют отсутствие вмешательства в систему актом измерения в некоторый начальный момент времени? Каков временный ход процессов, не нарушенных наблюдением?

Решение этой задачи не укладывается в рамки обычной постановки задачи Коши.

Мы получим вышеуказанную гарантию, потребовав, чтобы начальные условия органически были связаны и определились всем ходом исследуемой величины на всем промежутке времени:

$$t_0 \leq t \leq t_1 \quad (t_0 \rightarrow -\infty, t_1 \rightarrow +\infty).$$

Математическая задача сводится к исследованию свойств частного решения уравнения (27):

$$\Phi(t, \bar{r}, \bar{v}) = c_1 \int_{t_0}^{t_1} F(\tau, \bar{r} - \bar{v}(t-\tau), \bar{v}) d\tau + c_2 \int_{t_1}^t F(\tau, \bar{r} - \bar{v}(t-\tau), \bar{v}) d\tau, \quad (43)$$

где

$$t_0 \leq t \leq t_1$$

$$c_1 + c_2 = 1.$$

Рассмотрим решение, для которого $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. В развернутом виде уравнение (43) будет иметь следующий вид, проинтегрировав его по скоростям:

$$\begin{aligned} \rho(\bar{r}, t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m} \bar{\nabla}_{\bar{v}} \Phi_0 d\omega \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \bar{\nabla}_{\bar{r}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(|\bar{r} - \bar{v}(t-\tau) - \bar{r}'|) \rho(\bar{r}', \tau) d\bar{r}' + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{t_1}^t d\tau \bar{\nabla}_{\bar{r}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(|\bar{r} - \bar{v}(t-\tau) - \bar{r}'|) \rho(\bar{r}', \tau) d\bar{r}' \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде:

$$\rho(\bar{r}, t) = \sum_{\bar{k}} q_{\bar{k}}(t) e^{i\bar{k}\bar{r}}. \quad (45)$$

Подставляя в (44) и принимая во внимание условие перестановочности в пределах интегрирования по скоростным переменным и времени,

получаем следующее интегральное уравнение уже типа Фредгольма (тогда как проблема Коши приводит к уравнению Вольтерра*) для определения неизвестной функции $q_{\bar{k}}(t)$:

$$q_{\bar{k}}(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t G_k(t-\tau) q_{\bar{k}}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_1}^t G_{\bar{k}}(t-\tau) q_k(\tau) d\tau, \quad (46)$$

где $G_{\bar{k}}(t)$ представляется тем же ядром, как и в уравнении Вольтерра (30)

$$G_{\bar{k}}(t) = -\frac{\sigma(k)}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\bar{k}\bar{v}t} i(\bar{k}\bar{v}) \Phi_0 d\omega; \quad \sigma(k) = 4\pi \int_0^\infty K(\rho) \frac{\sin k\rho}{k\rho} \rho^2 d\rho.$$

Для максвелловской функции распределения

$$G_k(t) = \frac{\sigma(k) N}{m} k^2 t e^{-\frac{k^2 c^2 t^2}{4}}$$

$$\left(c^2 = T \frac{2kT}{m} \right).$$

Уравнение (46) указывает:

1. Решения, отличные от нуля и ограниченные, существуют на всем интервале $t_0 < t < t_1$ [уравнение Фредгольма (с симметрическим ядром) в отличие от уравнений Вольтерра].

2. Временные процессы, описываемые уравнением (46), прерывно изменяют свой характер при непрерывном изменении параметров, входящими множителем в «ядро» $G_{\bar{k}}(t)$ (температура и плотность). Это изменение невозможно уловить проблемой Коши.

Поэтому широко применяемая в теоретической физике предпосылка (являющаяся, в сущности, постулатором) о том, что каждый физический процесс можно воссоздать путем надлежаще подобранных начальных условий, т. е. путем решения задачи Коши,—является положением, далеко не исчерпывающим всех возможных процессов. Уравнение (46) описывает эти новые процессы, которые в статье [2] названы «спонтанными».

К ним относятся:

1) процессы кристаллизации (периодические решения принадлежа к классу уравнений (46), а не уравнений (30);

2) процесс образования «страт» в электронной плазме (см. ниже);

3) волны плотности в электронной плазме («дисперсионное уравнение»);

4) наличие и спонтанное появление «обратимых» потоков, которые анализируются далее, и, повидимому, ряд других еще не рассмотренных нами явлений.

Исследуемая задача, в отличие от задачи Коши, описывает временные процессы, носящие обратимый характер.

* В других случаях $c_1 \neq 1/2$, $c_2 \neq 1/2$ получаем «промежуточные» уравнения между уравнением типа Вольтерра и уравнением Фредгольма, недостаточно изученными математикой.

Приближенный вид решения уравнения (46) мы получим, если, учитя быстрое убывание ядра с ростом аргумента, распространим пределы интегрирования до бесконечности. Тогда имеем:

$$q_{\bar{k}}(t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\bar{k}}^*(|t-\tau|) q_k(\tau) d\tau = 0, \quad (47)$$

где $\lambda G_{\bar{k}}^*(t) = G_k(t)$.

Это интегральное уравнение имеет нетривиальные решения (отличные от нуля и ограниченные), только если λ превышает некоторое критическое значение λ_0 .

Именно, полагая решение в виде:

$$q_{\bar{k}}(t) = \sum_{\omega} a_{\omega} e^{i\omega t} \quad (48)$$

и подставляя в (47), получим:

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^{\infty} G_{\bar{k}}^*(x) \cos \omega x dx} > \lambda_0 = \frac{1}{\int_0^{\infty} G_{\bar{k}}^*(x) dx}, \quad (49)$$

откуда мы видим, что уравнение (49) можно удовлетворить выбором соответствующего значения ω только при условии, если λ превышает критическое значение λ_0 .

Таким образом, если $\lambda < \lambda_0$, то нет временных периодических решений, при $\lambda > \lambda_0$ они существуют, и временные периоды определяются из уравнения (49).

Критерий (49) и представляет наше прежнее «дисперсионное уравнение» для наиболее общего случая центральных сил, представленное только в несколько ином математическом виде, если выступающий в прежнем варианте вывода несобственный интеграл понимать в смысле «главного значения».

Для $\lambda < \lambda_0$ решение уравнения (47) имеет вид $e^{\omega t} + e^{-\omega t}$ с реальным значением ω . Критерий их выступления и формула для определения ω есть:

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^{\infty} G_{\bar{k}}^*(x) \operatorname{ch} \omega x dx} < \lambda_0 = \frac{1}{\int_0^{\infty} G_{\bar{k}}^*(x) dx}. \quad (50)$$

Рассмотрим несколько приложений *.

I. СПЕКТР ЧАСТОТ В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

«Дисперсионное уравнение» (49) имеет вид:

$$1 = \int_0^{\infty} G_{\bar{k}}(t) \cos \omega t dt, \quad (51)$$

* Подобные вычисления приведены в последней главе монографии «Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения» [1]

где

$$G_{\bar{h}}(t) = -\frac{\sigma(k)}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikvt} i(\bar{k}\bar{\nabla}_v) \Phi_0 d\omega$$

$$\sigma(k) = 4\pi \lim_{x \rightarrow 0} e^x \int_0^\infty \frac{e^{-x\rho}}{\rho} \frac{\sin k\rho}{k\rho} \rho^2 d\rho = 4\pi \frac{e^2}{k^2}.$$

A. Высокие температуры

В этом случае за невозмущенную функцию $\Phi_0(\xi, \eta, \zeta)$ распределения примем максвелловскую функцию, получим:

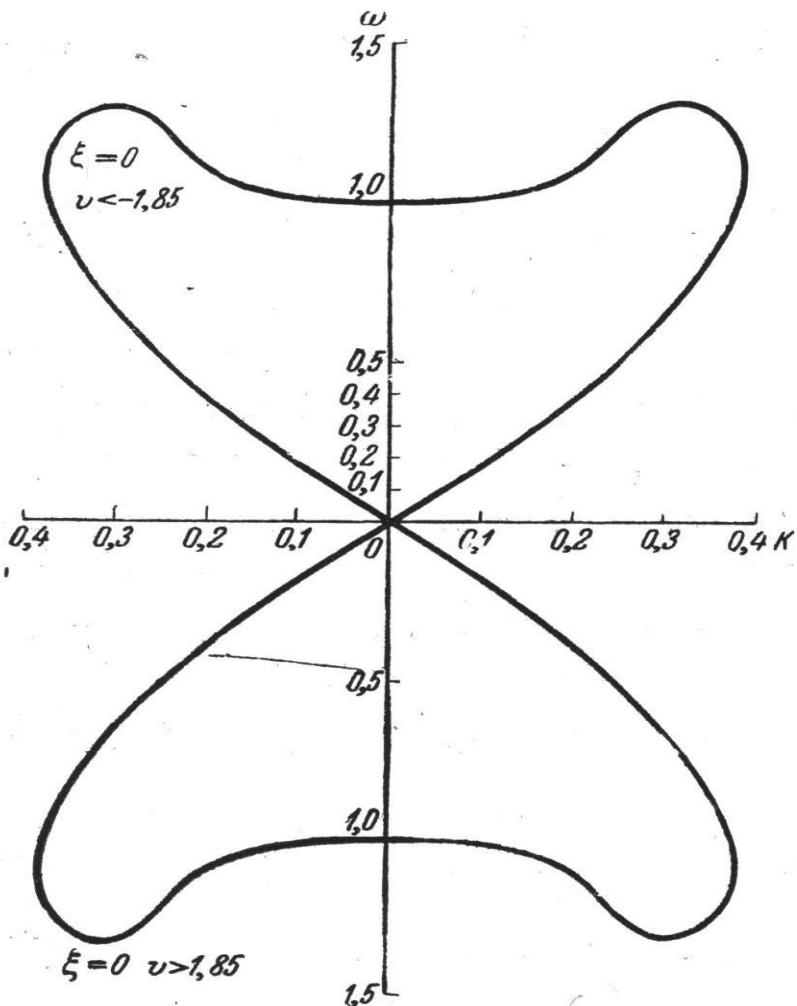


Рис. 4. Дисперсионная кривая для электронов с функцией распределения по Максвеллу.

где ε_0 — максимальная энергия Ферми-распределения, и полагая $\frac{kT}{\varepsilon_0} \ll 1$, получим из (51) после несложных вычислений, проведением которых я обязан Ющенковой Н. И., следующую формулу:

$$\frac{1}{3} k^{x_2} = -1 + \frac{1}{2} v^* \ln \frac{(v^* + 1)^2 + \varepsilon^{*2}}{(v^* - 1)^2 + \varepsilon^{*2}} \quad (53)$$

$$v^* = \frac{\omega^*}{k^*},$$

$$1 = -\omega_0^2 \int_0^\infty t e^{-\frac{k^2 c^2 t^2}{4}} \cos \omega t dt;$$

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}$$

или в безразмерных единицах

$$k^{*2} = -4 \int_0^\infty x e^{-x^2} \cos v^* x dx \quad \left. \right\},$$

$$v^* = \frac{2\omega^*}{k^*} \quad (52)$$

$$k^* = \frac{k}{k_0}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad k_0 = \frac{c}{\omega_0},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}}, \quad c^2 = \frac{2kT}{m}.$$

Графическая зависимость $\omega^* = \omega^*(k^*)$, полученная численным интегрированием, приведена на рисунке 4. Основные особенности дисперсионной кривой для электронной плазмы отмечены в статье [2].

B. Низкие температуры

Принимая для этого случая за Φ_0 функцию распределения Ферми-Дирака

$$\Phi_0 = \frac{2m^3}{h^3} \frac{1}{e^{\epsilon - \epsilon_0/kT} + 1},$$

где

$$k_0^2 = \frac{4\pi Ne^2}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon^* = \frac{kT}{\varepsilon_0}.$$

Ход зависимости $\omega^* = \omega^*(k^*)$ представлен на графике 5.

Существенным результатом является следующий. При $T = 0$ ($\varepsilon^* = 0$) не существует максимальных значений частоты и волнового числа. Ветви дисперсионной кривой уходят в бесконечность. При $T \neq 0$ дисперсионная кривая замкнута. С повышением температуры максимальные значения частот и волновых чисел уменьшаются. Существует эффект быстрого изменения минимального значения периода

$$d_{\min} = \frac{2\pi}{k_{\max}} :$$

$\varepsilon^* = 0$	$k_{\max} = \infty$
$\varepsilon^* = 0,001$	$k_{\max} \sim 1,56$
$\varepsilon^* = 0,01$	$k_{\max} \sim 1,29$
$\varepsilon^* = 0,1$	$k_{\max} \sim 0,73$

II. ЭФФЕКТ «КРИСТАЛЛИЗАЦИИ» В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

Хотя кулоновский закон сил не удовлетворяет условиям реализации кристалла при $T \rightarrow 0$, т. е. условиям реализации «решетчатого» решения (см. § 4), однако, как было отмечено выше, критерий появления периодических решений для плотности частиц при высоких температурах отличен от критерия реализации «решетчатого» решения (см. пункт В, § 4), поэтому теория приводит к существованию периодической структуры, не переходящей при $T \rightarrow 0$ в кристалл.

Для электронного газа при наличии потока электронов возникают пространственные периодические решения для плотности электронного газа, как только скорость потока превысит некоторое критическое значение.

Дисперсионное уравнение в потоке электронов с асимметричной функцией распределения:

$$\Phi_0 = \Phi_0(\xi^2, \eta^2, (\zeta - \zeta_0)^2)$$

имеет вид на основании формулы (51):

$$1 = \int_0^\infty G_{\bar{k}, \zeta_0}(t) \cos \omega t \, dt, \quad (54)$$

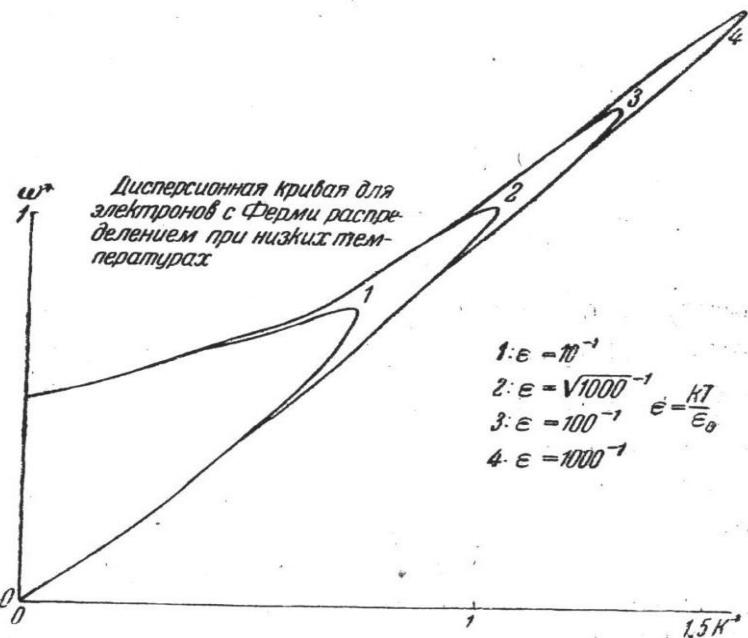


Рис. 5. Дисперсионная кривая для электронов с функцией распределения по Ферми.

где обозначено

$$G_{\bar{k}, s_0}(t) = e^{i k_z s_0 t} G_{\bar{k}}(t), \quad k_z \parallel \text{оси } z$$

и G_k — ядро с симметричной функцией распределения. Для максвелловой функции распределения

$$\Phi_0 = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \zeta_0)^2)}{2s_0 kT}}$$

дисперсионное уравнение (54) в безразмерных единицах есть:

$$\left. \begin{aligned} k^{*2} &= -4 \int_0^\infty x e^{-x^2} \cos v^* x \, dx \\ v^* &= 2 \left(\frac{\omega^*}{k^*} - \zeta_0^* \right) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\left(\zeta_0^* = \frac{\zeta_0}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \right),$$

откуда следует существование периодических решений ($k^2 > 0$) уже для стационарного случая при $\omega = 0$, как только скорость потока превыси критическое значение $\frac{2\zeta_0}{c} = 1,85$, ибо для больших значений интеграла меняет знак.

Зависимость периодов от скорости потока (зависимость k^* от ζ_0^*) для стационарного случая показана на рис. 6.

Найденные периодические решения должны быть положены в основу для объяснения экспериментально известного явления «страт» в электронной плазме.

III. «ОБРАТИМЫЕ» ПОТОКИ

1. Существование двух фаз. Исходное уравнение (1) имеет точное решение, соответствующее равномерному в пространстве распределению частиц. Какой математический смысл линеаризации? Линеаризованное уравнение в сущности есть уравнение в вариациях для исходного интегрального нелинейного уравнения, т. е. оно по общей теории нелинейных интегральных уравнений (A. Hammerstein. Acta Mathematica, 54, 1930) даёт ответ на вопрос о существовании других решений вблизи известного точного решения.

Таким образом линеаризованное уравнение для функции распределения $\Phi_0 + \phi$ есть уравнение для других решений, одновременно существующих с тривиальным — со случаем равномерной плотности с изотропным распределением скоростей (Φ_0). Первое и второе решения представляют различные состояния среды, динамически не взаимодействующие, поскольку они представляют разные решения исходного уравнения. Физически мы должны их описывать как решения, описывающие две разные фазы. Для частиц с силами взаимодействия удовлетворяющими условию:

$$\int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho < 0, \quad (55a)$$

мы можем говорить о второй фазе как о «кристаллизующейся среде» ([3] и § 4 этой работы). Для

$$\int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho > 0 \quad (55b)$$

в среде не возникает периодической структуры при понижении температуры, но есть другие своеобразные свойства, которые здесь анализируются (существование обратимых потоков). Выражение для плотности ρ_ϕ какой-либо величины ϕ , связанной с частицами, есть:

$$\rho_\phi = N \bar{\Phi} = \int \Psi \cdot \varphi \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta,$$

где N есть концентрация частиц и φ — возмущенная функция распределения, определяющаяся соотношением (43).

Потребовав достаточно быстрое убывание невозмущенной функции распределения Φ_0 с ростом скоростей и полагая $\psi = 1$, v , легко получим следующее выражение для основных макроскопических величин: плотности частиц ρ и потока частиц \bar{j} :

$$\rho = \sum_k q_{\bar{k}}(t) e^{i(\bar{k}\bar{r})}; \bar{j} = \sum_k \frac{\bar{k}}{\bar{k}^2} \dot{q}_{\bar{k}}(t) e^{i(\bar{k}\bar{r} - \frac{\pi}{2})}, \quad (56)$$

где $q_k(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению Фредгольма:

$$q_k(\tau) - \frac{\lambda}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} G_{\bar{k}}(|\tau - \tau'|) q_{\bar{k}}(\tau') d\tau' = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (\tau \text{ безразмерно: } \tau = ckt), \lambda = \frac{\sigma(k) N}{mc^2} \\ G_{\bar{k}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{\bar{k}}{\bar{k}} v^* \tau} i \left(\frac{\bar{k}}{\bar{k}} \nabla_{\bar{v}} \right) \Phi_0 d\omega^* \quad \left(\bar{v}^* = \frac{\bar{v}}{c} \text{ безразмерно, } c \text{ — } \right. \\ \left. \text{характерная скорость в распределении } \Phi_0; \int \Phi_0 d\omega^* = 1 \right) \end{array} \right\} \quad (57)$$

Для максвелловского распределения $G_{\bar{k}}(\tau) = \tau e^{-\frac{\tau^2}{4}}$.

$$\sigma(k) = 4\pi \int_0^\infty K(\rho) \rho^2 \frac{\sin k\rho}{k\rho} d\rho.$$

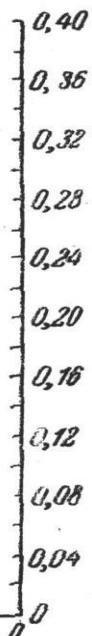


Рис. 6. Периоды страт в зависимости от скорости электронного потока.

На основании общей теории интегральных уравнений заключаем о существовании дискретного спектра собственных значений λ для фиксированного значения k

$$\lambda_1(k), \lambda_2(k), \lambda_3(k), \dots$$

Таким образом при фиксированном k плотность частиц и плотность потока меняются дискретным образом при непрерывном изменении температуры.

Приближенный вид собственных функций получим путем следующей операции. Ввиду быстрого убывания ядра в уравнении (57) с ростом аргумента мы распространим пределы интегрирования до бесконечности, т. е. положим: $\tau_0 \rightarrow -\infty, \tau_1 \rightarrow +\infty$. В этом случае собственные функции принадлежат к классу

$$q_{\bar{k}}(t) \sim e^{i\omega t}$$

и условия разрешимости уравнения (57) имеют вид «дисперсионного уравнения»

$$\lambda = \frac{4\pi N}{mc^2} \int_0^\infty K(\rho) \rho^2 \frac{\sin k\rho}{k\rho} d\rho = \frac{1}{\int_0^\infty G_{\bar{k}}(x) \cos vx dx} \geq \lambda_0 = \frac{1}{\int_0^\infty G_{\bar{k}}(x) dx} \quad (58)$$

(для максвелловского распределения $\lambda_0 = 2$). Выражения (56) в этом случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sum_k q_{\bar{k}}(t) e^{i\bar{k}r} \\ \bar{j} &= \sum_k \frac{\omega}{\bar{k}} \bar{k}_1 q_{\bar{k}}(t) e^{i\bar{k}r} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

2. Существование обратимых потоков. Исследуемый класс решений характеризуется симметрией относительно времени t , поэтому процессы, описываемые этими решениями, мы должны отнести к классу «обратимых».

Перепишем уравнение (57) (с бесконечными пределами) в форме:

$$q_{\bar{k}}(\tau) - \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\bar{k}}(s) q_{\bar{k}}(\tau - s) ds = 0, \quad (60)$$

откуда усматриваем, что если $q_k(\tau)$ есть решение, то $q_k(-\tau)$ есть также решение.

Уравнению (60) удовлетворяет функция со сдвигом на любой интервал T :

$$q_k(\tau + T).$$

$q_k(\tau)$ (а также производные любого порядка), также удовлетворяет уравнению (60). Последнее обстоятельство указывает, что потоки частиц, определяемые соотношением (59), принадлежат к классу «обратимых».

3. «Обратимые потоки существуют и в стационарном состоянии. Для перехода к стационарному состоянию положим $\omega \rightarrow 0$. Могут быть два случая: а) при $\omega \rightarrow 0 \frac{\omega}{\bar{k}} \rightarrow 0$. В этом случае

потоки в стационарном состоянии отсутствуют, как это видно из формулы (59). β) при $\omega \rightarrow 0$ $\frac{\omega}{k} \rightarrow$ к конечному значению, не равному нулю, в данном случае потоки существуют и в стационарном состоянии. Случай «β» реализуется при следующих условиях: 1) $k \rightarrow 0$, 2) $\int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho > 0$, 3) $mc^2 < 4\pi N \int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho$. При этих условиях «дисперсионное» уравнение имеет вид:

$$\frac{4\pi N}{mc^2} \int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho = \frac{\omega^2}{k^2 c^2}. \quad (61)$$

Следовательно, величина «обратимого» потока равна: $j = \frac{\omega}{k} \rho \rightarrow c_1 \rho$, где c_1 — характерная скорость — не зависит от температуры

$$c_1 = \sqrt{\frac{4\pi N}{m} \int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho}. \quad (62)$$

4. «Обратимые» потоки возникают спонтанно, т. е. после того как температура будет меньше некоторого критического значения. В самом деле, для длинных волн (малых k) существование решения указанного класса должно удовлетворять неравенству:

$$\frac{4\pi N}{mc^2} \int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho \geq \lambda_0 \quad \text{или} \quad mc^2 \leq \frac{4\pi}{\lambda_0} \int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho. \quad (63)$$

5. «Обратимые» потоки исчезают при скоростях среды, превышающих некоторую критическую скорость: «Дисперсионные» уравнения в потоке частиц имеют вид:

$$\int_0^\infty G_{\bar{k}}(x) \cos vx dx = -\frac{1}{\frac{4\pi N}{mc^2} \int_0^\infty K(\rho) \frac{\sin k\rho}{k\rho} \rho^2 d\rho} \geq -\frac{1}{\frac{4\pi N}{mc^2} \int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho}. \quad (64)$$

$$v = 2 \left(\frac{\omega}{kc} - \frac{\zeta_0}{c} \right), \quad \zeta_0 \text{ — скорость потока.}$$

Откуда видим, что при постоянных значениях параметров среды N и T , меняя ζ_0 и фиксируя значение $\frac{\omega}{k}$, может быть всегда достигнуто нарушение знака неравенства, и, следовательно, указанный класс решений будет отсутствовать у исходного уравнения.

Критическая скорость определяется из соотношений:

$$\int_0^\infty G_{\bar{k}}(x) \cos 2 \left(\frac{\omega}{kc} - \frac{\zeta_0}{c} \right) x \cdot dx = -\frac{1}{\frac{4\pi N}{mc^2} \int_0^\infty K(\rho) \rho^2 d\rho}. \quad (65)$$

6. «Обратимые» потоки имеют место и в электронном газе. Для малых значений k «дисперсионное» уравнение имеет вид двух ветвей

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + c_1^2 k^2 + \dots \quad \dots \text{ первая ветвь} \quad (66)$$

$$\omega_2^2 = c_2^2 k^2 + \dots \quad \dots \text{ вторая ветвь}, \quad (67)$$

где при максвелловском распределении

$$c_1^2 = \frac{3kT}{m}, \quad c_2 \sim 1,3 \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (68)$$

и при распределении Ферми

$$c_1^2 = \frac{2/3 \epsilon_0}{m}, \quad c_2 \sim \sqrt{\frac{\epsilon_0}{m}}$$

(ϵ_0 — максимальная энергия Ферми распределения). (69)

Таким образом в обоих случаях отношение $\frac{\omega}{k}$ (вторая ветвь) имеет конечную величину, отличную от нуля, что и необходимо на основании пункта 3 для существования «обратимых» потоков в стационарном случае ($\omega \rightarrow 0$).

Приведенные выше обстоятельства ставят вопрос о принадлежности реально наблюдаемых явлений сверхтекучести и сверхпроводности к классу исследуемых здесь явлений, не укладывающихся в обычные рамки задачи Коши.

Полученные результаты склоняют нас дать ответ на этот вопрос в утвердительном смысле.

Таким образом в отличие от предыдущих рассмотрений (Тисса, Лондон, Ландау) теория приводит к тому, что, во-первых, принципиальная физическая сторона этих явлений заключается в проблеме времени и, во-вторых, что эти явления не специфичны только для ультранизких температур (критерии (63) и (55b) достаточно «мягки»).

§ 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрением пяти возражений исчерпано содержание критики моих работ. Это рассмотрение показывает, что выдвинутые пять возражений против основ теории и ее следствий преждевременны, и, более того, анализ указывает на их ошибочность. Именно:

Первое возражение: «Для короткодействующих сил основное уравнение неприменимо».

Это суждение дано критиками без доказательства. Рассмотрение, однако, показывает, что основное исходное уравнение теории в сущности не зависит от быстроты убывания сил взаимодействия с расстоянием между частицами, а определяется несколько другими критериями (см. § 1 и 2).

Второе возражение: «Метод «самосогласованного поля» находится в противоречии с обычными методами статистики».

Здесь критика ошибается, ибо метод «самосогласованного поля» не находится в противоречии с обычными методами статистики (см. § 3).

Третье возражение: «Никакого дисперсионного уравнения не

существует», так как, во-первых, допущена ошибка — нельзя делить на нуль, во-вторых, выбор «главного значения» произволен.

Дисперсионное уравнение существует и приводит к важным результатам (§ 5, 6), однако представляет только частное, но наиболее важное решение исходного уравнения. Полное решение дано в монографии автора, которая критиками не цитируется.

Четвертое возражение: «Основное уравнение (метод) порочен..., так как распределение плотности зависит от закона взаимодействия при непосредственном сближении частиц, что нелепо ...».

Положение более сложно; именно, как видно из исходного уравнения теории (§ 1) и его анализа (§ 3), распределение плотности практически мало чувствительно к характеру закона взаимодействия между парой частиц при непосредственном их сближении, а определяется более сложными обстоятельствами (см. § 3).

Пятое возражение: «Период кристаллической структуры не может зависеть от температуры при заданной плотности среды».

В новой теории кристаллического состояния существует несколько периодов: «сверхпериоды» и «обычный период». Расчет показывает, что «сверхпериоды» существенно зависят от температуры при заданной плотности среды, а обычный период от температуры не зависит (см. § 4).

Таким образом критика, неправильно интерпретируя основы теории (§ 1, 2), ошибочно критикуя ее следствия (§ 3, 4, 5, 6) и замалчивая основные результаты (не упоминая основную работу), дает широкой публике совершенно ложную информацию о состоянии физической теории, результатах и перспективах ее развития.

Новые представления о природе кристаллического состояния сформулированы и должны развиваться. Особый класс временных физических процессов, не укладывающийся в рамки задачи Коши, выявленный дисперсионным уравнением, существует.

В этой статье, помимо разъяснения и опровержения возражений, даны новые результаты:

1. Уточнено и обобщено предложенное ранее исходное уравнение теории (§ 1). В теорию включен эффект «деформации» частиц при их сближении в наиболее общей феноменологической форме, не зависящей от природы частиц.

2. Установлено положение о характере метода «самосогласованного поля» (§ 2) и продискутированы его особенности.

3. Даны новые результаты в теории кристалла для высоких, низких и промежуточных температур. Дан выход теории в эксперимент. Найдены почти периодические решения для кристалла. Нерегулярность идеального кристалла, таким образом, органически включена в теорию.

4. Рассмотрена задача Коши и показано, что решение этой проблемы не исчерпывает временных процессов в системах многих частиц, дано дальнейшее развитие «спонтанных» процессов (§ 5, 6).

5. Установлен эффект «кристаллизации» в электронной плазме и указана его связь с явлением «страт».

6. Доказано существование «обратимых» потоков, вскрыты условия их появления и их свойства. Указана связь этих потоков с явлениями сверхтекучести и сверхпроводимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Власов. ЖЭТФ, 8, 291, 1938; Ученые записки МГУ, Физика, 2, ч. 1, 1945 (монография).
2. А. А. Власов. Jour. of Phys. 9, 25, 1945.
3. А. А. Власов. Jour. of Phys. 9, 130, 1945.
4. V. Volterra. Fonctions Lignes, 27—28. Paris, 1913.
5. L. A x i l r o d and E. T e l l e r. Journ. of Chem. Phys., 11, 299, 1943.
6. Н. Н. Богоявленский. Проблемы динамической теории в статистической физике (монография). Гостехиздат, 1946.
7. W i d d e r. The Laplace transform, 277—280, 1941.
8. J. L e n n a r d - J o n e s. Physica, 4, 941, 1937.
9. П. А. М. Дирак. Основы квантовой механики. Второе издание. Гостехиздат стр. 208—214, 1937.
10. H e i s e n b e r g. Zs. f. Phys., III, 1944.

Professor A. A. VLASOV

CONCERNING THE GENERALIZED THEORY OF THE PLASM AND THE THEORY OF THE SOLID BODY

Summary

The present article is an answer to two critical articles which appeared in 1946 concerning the investigations of the author. They were written by 1) V. Ginsburg, L. Landau, M. Leontovitch and V. Fock and 2) L. Landau.

The present paper contains refutations and explanations, as well as a further elaboration of the theory and its applications.

1. A further generalization of the initial equation is given. The theory includes, in the most general phenomenological form, independent of the nature of the particles, the effect of «deformation» of particles when they come closer together.

2. The specific peculiarities of the method of the self-conformable field are brought out.

3. The results of further investigations of the theory of the crystal state for high, low, and intermediate temperatures are given. Among other things, almost periodical solutions for a crystal have been found. The structural irregularity of an ideal crystal is thus made to form an organic part of the theory.

4. Cauchy's problem (with initial conditions) has been considered. It has been shown that the solution of this problem does not exhaust the time-dependent processes in the system of many particles. A further development of a special class of time processes, which are referred to as «spontaneous» is given.

5. The crystallization effect in an electron plasma has been established and its connection with the phenomenon of stratation has been indicated.