Т. 18. Журнал экспериментальной и теоретической физики. Вып. 9
1948

НОВОЕ СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАЧИ МНОГИХ ЧАСТИЦ

А. А. Власов

§ 1. Основы метода

Метод основан на способе описания поведения частиц с помощью следующих уравнений [1–5]: а) Для двух разных частиц,

$$
\begin{gathered}
-\partial f_1/\partial t = \operatorname{div}_{\mathbf{r}_1}\mathbf{v}_1 f_1 - \operatorname{div}_{\mathbf{v}_1} m_1^{-1}\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_1} V_{12} f_1,\\
-\partial f_2/\partial t = \operatorname{div}_{\mathbf{r}_2}\mathbf{v}_2 f_2 - \operatorname{div}_{\mathbf{v}_2} m_2^{-1}\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_2} V_{21} f_2,\\
V_{12}(\mathbf{r}_1,t) = \int K(\,|\,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\,|\,)\,\rho_2(\mathbf{r}_2,t)\,d\mathbf{r}_2,\\
V_{21}(\mathbf{r}_2,t) = \int K(\,|\,\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1\,|\,)\,\rho_1(\mathbf{r}_1,t)\,d\mathbf{r}_1,\\
\rho_1(\mathbf{r}_1,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1,t)\,d\mathbf{v}_1;\quad \rho_2(\mathbf{r}_2,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\mathbf{r}_2,\mathbf{v}_2,t)\,d\mathbf{v}_2.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

б) Для системы N одинаковых частиц (полагая $f_1 = f_2 = \ldots = f_N = f$), взаимодействующих помимо произвольных центральных сил также электродинамически [1]:

$$
\begin{gathered}
-\partial f/\partial t = \operatorname{div}_{\mathbf{r}}\mathbf{v} f + \operatorname{div}_{\mathbf{v}} m^{-1}\{-\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} V + e(\mathbf{e} + c^{-1}[\mathbf{vh}])\}\,f,\\
V(\mathbf{r},t) = \sum_n \int\ldots\int K_n(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n)\,\rho(\mathbf{r}_1,t)\,\rho(\mathbf{r}_2,t)\ldots\rho(\mathbf{r}_n,t)\,d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2\ldots d\mathbf{r}_n,\\
\operatorname{div}\mathbf{e} = 4\pi e(N-1)\int f d\mathbf{v};\quad \operatorname{rot}\mathbf{h} - c^{-1}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}e(N-1)\int \mathbf{v} f\,d\mathbf{v}\\
(\operatorname{div}\mathbf{h} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{e} - c^{-1}\partial\mathbf{h}/\partial t = 0),\\
\rho(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v},
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где ядра K_n ($n = 1, 2, \ldots, N-1$) зависят от модуля расстояний между частицами, включают общее число частиц N:

$$K_s \cong (N-1)!/s!(N-1-s)!,$$

в остальном произвольны.

[1] Суммирование по n везде производится от 1 до $N-1$.

Нелинейные функционалы учитывают в наиболее общей феноменологической форме неаддитивность сил молекулярного взаимодействия. Второй член функциональной суммы, завися только от трех разных индексов, имеет место лишь при наличии не менее трех частиц, третий — четырех и т. д. Число членов этой суммы просто равно общему числу частиц без одной.

в) Для $N \gg 1$ (удерживая взаимодействия только аддитивного типа) имеем простейшую форму:

$$-\partial f/\partial t = \mathbf{v}\,\mathrm{grad}_{\mathbf{r}} f + (1/m)\mathbf{F}\,\mathrm{grad}_{\mathbf{v}} f,$$
$$\mathbf{F} = -\,\mathrm{grad}_{\mathbf{r}} \int K(\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|\,)\,d\mathbf{r}' \int f(t,\ \mathbf{r}',\ \mathbf{v}')\,d\mathbf{v}'. \tag{3}$$

Уравнение (3) принадлежит к классу функциональных уравнений типа:

$$-\partial u/\partial t = y(\partial u/\partial x) + \left\{\lambda\,(\partial/\partial x)\int_{-\infty}^{\infty} K(|x-x'|)\,u(t,x',y')\,dx'dy'\right\}(\partial u/\partial y)$$
$$(u = u(t,\ x,\ y)).$$

1. В стационарном случае ($\partial/\partial t = 0$) удобно придать исходным уравнениям другой вид. Полагая, например, в (1): $f_i = w_i(\varepsilon_i)\rho_i(\mathbf{r}_i)$, $i = 1,2$ ($\varepsilon_i = (m_i/2)(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2)$), находим после подстановки в (1), как следствие:

$$w_i(\varepsilon_i) = w_i(0)\,e^{-\varepsilon_i/\varepsilon_0}$$

(где можно положить $\varepsilon_0 = kT$),

$$\rho_1(\mathbf{r}_1) = \rho_1(0)\,e^{-[V_{12}(\mathbf{r}_1) - V_{12}(0)]/kT},$$
$$V_{12}(\mathbf{r}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\,|\,\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\,|\,)\,\rho_2(\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_2, \tag{4}$$

и аналогичное уравнение для плотности вероятности местоположения второй частицы. Из (4) видим, что в стационарном случае индивидуализация частиц стушевалась, поэтому можно положить $\rho_1(\mathbf{r}_1) \equiv \rho_2(\mathbf{r}_2) = \rho(\mathbf{r})$ и описать состояния многих частиц одним уравнением.

Для потенциала $V(\mathbf{r})$ уравнение таково:

$$V(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|\,)\,f(V(\mathbf{r}') - V(0))\,d\mathbf{r}', \tag{5}$$

где

$$f(\mathbf{r}) = \rho(0)\,e^{-[V(\mathbf{r}) - V(0)]/kT}.$$

Для N одинаковых частиц без учета функциональных взаимодействий:

$$V(\mathbf{r}) = (N-1)\int_{-\infty}^{\infty} K(\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|\,)\,f(V(\mathbf{r}') - V(0))\,d\mathbf{r}',$$

с учетом:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int K_n(\mathbf{r},\ \mathbf{r}_1,\ \ldots,\ \mathbf{r}_n)\,f(V(\mathbf{r}_1) - V(0))\ldots f(V(\mathbf{r}_n) -$$
$$- V(0))\,d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n. \tag{6}$$

Задача стационарных состояний в системе многих частиц сводится как видим, к проблеме собственных значений нелинейных интегральных уравнений. Основной параметр в уравнениях (5) и (6) содержит температуру. Существенно, что в излагаемом методе эта задача выступает уже для двух частиц и, таким образом, метод содержит тепловое движение органически, в принципиальном отличии от классической задачи N тел.

2. Для рассмотрения динамических задач удобна иная форма основного уравнения (не содержащая производных по времени и координатам). Так, для функции распределения первой частицы в задаче двух частиц имеем:

$$f_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_1(t_0, \mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_0), \mathbf{v}) + \int_{t_0}^{t} F(\tau, \mathbf{r} - \mathbf{v}(t - \tau), \mathbf{v})\, d\tau, \tag{7}$$

$$F(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \operatorname{div}_{\mathbf{v}} \left(m^{-1} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\, \rho_2(\mathbf{r}', t)\, d\mathbf{r}' \right) f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \tag{8}$$

$$\rho_2(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v},$$

и совершенно аналогичные выражения в задаче многих частиц.

Форма (7) важна для решения задачи Коши (в тех случаях, когда она разрешима).

Временные процессы, для которых произвольный начальный момент времени не выделен, описываются другим представлением исходных уравнений (аналогичным полусумме запаздывающих и опережающих потенциалов):

$$f_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = {}^1/_2 \int_{t_0}^{t} F(\tau, \mathbf{r} - \mathbf{v}(t - \tau), \mathbf{v})\, d\tau + {}^1/_2 \int_{t_1}^{t} F(\tau, \mathbf{r} - \mathbf{v}(t - \tau), \mathbf{v})\, d\tau \tag{9}$$

$(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, где $F(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ определяется выражением (8).

При переходе $t_0 \to -\infty$, $t_1 \to +\infty$ выступающие несобственные интегралы в соответствии с указанной целью должны пониматься в смысле „главного значения“.

3. Поведение средних величин классического типа, например:

$$\int \mathbf{r} f\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}; \quad \int \mathbf{v} f\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}, \tag{10}$$

можно уяснить из формы, аналогичной уравнению Гаусса-Остроградского (содержащего поверхностные интегралы). Так, например, для двух частиц, умножая (1) на $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ поочередно и интегрируя по фазовому пространству, легко получим

$$\begin{gathered}
(\partial/\partial t) \int \mathbf{r} f_1 d\mathbf{v} d\mathbf{r} = \int \mathbf{v} f_1 d\mathbf{v} d\mathbf{r} - \int \mathbf{r} (\mathbf{v} d\mathbf{s}_{\mathbf{r}}) f_1\, d\mathbf{v}_1 + \int \mathbf{r} \operatorname{div}_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_{12} f_1 d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}_1, \\
(\partial/\partial t) \int \mathbf{v} f_1 d\mathbf{v} d\mathbf{r} = m^{-1} \int \mathbf{F}_{12} f_1 d\mathbf{v} d\mathbf{r} - m^{-1} \int \mathbf{v} (\mathbf{F}_{12} d\mathbf{s}_{\mathbf{v}}) f_1 d\mathbf{r} + \\
+ \int \mathbf{v} \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} f_1\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}, \\
\mathbf{F}_{12} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_1} \int K(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) f_2 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{v}_2
\end{gathered} \tag{11}$$

для первой частицы и аналогичные уравнения для второй, где $d\mathbf{s}_{\mathbf{r}}$ и $d\mathbf{s}_{\mathbf{v}}$ обозначают поверхностные элементы координатного и скоростного пространства соответственно. Очевидно, что совершенно аналогичные выражения имеют место в задаче многих частиц.

Вообще говоря, невозможно без дополнительных предположений получить уравнения только для величин классического типа (10) — правая часть во втором уравнении (11) зависит не только от второй частицы, но и от распределения скоростей и координат первой (f_1), кроме того, выступают поверхностные интегралы. Таким образом метод содержит больше, чем обычная схема задачи N тел.

4. Метод эквивалентен описанию совокупности частиц в пространстве $6N$ измерений, но с мультипликативной функцией распределения: $f(1, 2, 3, \ldots, N) = f(1) f(2) \ldots f(N)$. Так, например, для двух частиц уравнение (1) сводится к одному уравнению для $f(1, 2) = f(1) \cdot f(2)$:

$$-\partial f/\partial t = \mathrm{div}_{\mathbf{r}_1} \mathbf{v}_1 f + \mathrm{div}_{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}_2 f - \mathrm{div}_{\mathbf{v}_1} m_1^{-1} \vec{\nabla}_{\mathbf{r}_1} V_{12} f - \mathrm{div}_{\mathbf{v}_2} m_2^{-1} \vec{\nabla}_{\mathbf{r}_2} V_{21} f,$$

$$V_{12}(\mathbf{r}_1, t) = \int K(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) f(\mathbf{r}_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{v}_2 t)\, d\mathbf{v}_1\, d\mathbf{v}_2\, d\mathbf{r}_2; \tag{12}$$

$$V_{21}(\mathbf{r}_2 t) = \int K(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) f(\mathbf{r}_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{v}_2 t)\, d\mathbf{v}_1\, d\mathbf{v}_2\, d\mathbf{r}_1.$$

Проблема обоснования не может быть поставлена для уравнений вышеуказанного типа, ибо они содержат новые физические элементы и поэтому не могут быть выведены из прежних схем. Мой метод обобщает классическую схему задачи N тел в новом направлении.

1) Классическая схема задачи N тел имеет дефект, заключающийся в возможности произвольного задания начальных условий для частиц без каких-либо внутренних ограничений в такой возможности. Между тем, с физической точки зрения, задача Коши представляет собой физическую операцию, привносящую новый элемент в систему актом воздействия при сообщении частицам начальных условий. Существование этой операции нельзя вскрыть, оставаясь внутри классической схемы.

Но с точки зрения теории, включающей тепловое движение частиц как объективный процесс, органически присущий природе, задание произвольных начальных условий равносильно полному уничтожению этих процессов, реализация чего требует, очевидно, весьма радикальных операций. Пока же наши экспериментальные средства таковы, что мы, например, не имеем возможности точно остановить временный ход флуктуационных процессов.

В предлагаемом методе задача Коши представляет именно такую операцию, резко специализирующую характер временных процессов, выбирая только узкий класс возможных решений исходных уравнений, чем в принципе отличается от классической задачи N тел [5]. В математическом аппарате этому соответствует тот факт, что начальный момент в решении выделен. В точке $t = t_0$ функции распределения не являются голоморфными относительно $(t - t_0)$.

2) В отличие от обычных методов излагаемый метод запрещает пространственную локализацию частиц без того, чтобы такая локализация сопровождалась радикальными воздействиями на систему. Так, например, в стационарном состоянии строгую пространственную локализацию можно осуществить только при температуре, равной нулю. В математическом аппарате этому соответствуют резко ограничивающие предположения при получении классических связей.

Классическая связь выступает из (11) только при следующих условиях:

а) Нужно опустить поверхностные интегралы в (11) для всего промежутка времени $-\infty \leqslant t \leqslant +\infty$ независимо от остальных членов. Это есть шаг к введению локализации, ибо, например, в стационарном случае центр тяжести частицы не является фиксированным, и

поэтому невозможно опустить поверхностные интегралы, не впадая конфликт с уравнениями (5), (6) для стационарного состояния.

б) Нужно потребовать отсутствия перекрытий облаков вероятн сти местоположений каждой из частиц, в противном случае, благод ря нелинейности исходных уравнений, выступают интерференционнь эффекты, не имеющие аналога в классической теории.

в) Достаточно концентрированной пространственной локализаци каждой из частиц настолько, чтобы интегральные силовые взаим действия переходили в обычные — точечные:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\,\rho(\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_2 \to K(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

3) Метод в принципе отличается от кинетической теории Больі мана и аппарата статистической механики Гиббса интегральным уч том взаимодействия. Таким образом делается дальнейший шаг в н правлении отказа от пространственной локализации частиц не толь в начальных условиях, но и в силах.

Например, „самосогласованная сила“ в проблеме двух тел (1 действующая на одну частицу со стороны другой, зависит от врем ни через посредство функции распределения этой частицы, что в о щем случае не сводится только к зависимости силы от времени чер посредство координат обеих частиц.

Аппарат статистической механики Гиббса не является последов тельным, так как, включая тепловое движение частиц, основывает на точных уравнениях механики, из которых это тепловое движен выброшено. В предлагаемом методе эффект теплового движен содержится органически, так как уравнения теплового равновесия (4 (5), (6) получаются как решения исходных уравнений без привлечен дополнительных весьма искусственных положений типа схем с терм статом.

4) Уравнения (2), включающие электромагнитные взаимодействи указывают, что в отличие от максвелл-лорентцовской схемы набл даемыми являются только функции распределения. Легко видет комбинируя (2) и форму (11), что концепция поля получается толь для достаточно большого числа частиц и только как физический ак связанный с локализацией частиц ансамбля — свободным выбор „пробных телец“. Изучаемые частицы могут быть „точечными“, н их движение описывается „протяженными“ функциями распределени через посредство которых определяются поля, поэтому предлагаем схема не содержит известных трудностей с бесконечной собственн электростатической энергией точечных частиц.

5) Существенной особенностью метода является:

а) Отказ от возможности пространственной локализации части без явного и радикального вмешательства в систему.

б) Существование комплекса процессов и возможность их набл дения без этого акта. (В математическом аппарате эти процессы оп сываются аналитическими решениями по t на всем интерва $-\infty \leqslant t \leqslant +\infty$, к которым, в частности, относятся стационарн решения.)

Включая начальные условия как физический акт, новая схема з дачи N тел приближается к квантовой теории. Допуская возможно производить этот акт по нашему произволу и вскрывая процесс гарантирующие отсутствие вмешательства в систему актом измерен в некоторый начальный момент времени, предложенная схема зад чи N тел аналогична классической. Эта „промежуточность“ — весь характерная черта излагаемой теории.

§ 2. Стационарные состояния двух и многих частиц как проблема собственных значений нелинейных интегральных уравнений

Основные уравнения для стационарного состояния (5) и (6) преобразуем, введя безразмерные величины:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -V(\mathbf{r})/kT;\ \lambda = -[\rho(0)/kT]\, e^{V(0)/kT}\ \sigma(0);\ K^*(|\mathbf{r}|) = K(|\mathbf{r}|)/\sigma(0)$$

$$\left(\sigma(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|\,)\, d\mathbf{r}' = 4\pi \int_0^{\infty} K(\rho)\,\rho^2\, d\rho\right),$$

где ядро K^* — всегда положительно определенное и нормированное на единицу: $\int_{-\infty}^{\infty} K^*(\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|\,)\, d\mathbf{r}' = 1$ (в дальнейшем опустим значок * у K).

Получаем в качестве основных уравнений:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, e^{\varphi(\mathbf{r}')}\, d\mathbf{r}', \tag{α}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_n \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)\, e^{\varphi(\mathbf{r}_1)} \ldots e^{\varphi(\mathbf{r}_n)}\, d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n. \tag{α'}$$

Уравнение

$$V(\mathbf{r}) = \rho(0) \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, e^{-[V(\mathbf{r}') - V(0)]/kT} d\mathbf{r}', \tag{13}$$

имеет точное решение: $V(\mathbf{r}) = V(0) = \text{const}$, соответствующее равномерному распределению вероятности местоположения частиц в пространстве, так как при соблюдении этого условия уравнение (4) дает $\rho(\mathbf{r}) = \rho(0) = \text{const}$. Из уравнения (13) имеем

$$V(0) = \rho(0) \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}'|)\, d\mathbf{r}' = \rho(0) \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, d\mathbf{r}' = \text{const}.$$

Вычитание из выражения (13) приводит к другой форме уравнения в качестве основного:

$$V(\mathbf{r}) - V(0) = \rho(0) \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, \{e^{-[V(\mathbf{r}) - V(0)]/kT} - 1\}\, d\mathbf{r}'.$$

Вводя безразмерные величины:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -[V(\mathbf{r}) - V(0)]/kT, \quad \lambda = -[\rho(0)/kT]\,\sigma(0),$$

получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, \{e^{\varphi(\mathbf{r}')} - 1\}\, d\mathbf{r}' \tag{β}$$

[где K, так же как в (α), — положительно определенное и нормированное ядро].

Аналогично с учетом нелинейных функционалов;

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_n \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \{e^{\varphi(\mathbf{r}_1)} \ldots e^{\varphi(\mathbf{r}_n)} - 1\} d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n \quad (\beta')$$

$$\left(\lambda_n = -\frac{\rho^n(0)}{kT} \sigma_n(0),\ \sigma_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)\, d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n\right),$$

где λ_n может быть положительным и отрицательным, смотря по характеру сил взаимодействия [т. е. смотря по знаку $\sigma_n(0)$].

1. Формы основных уравнений (α), (α') удобны для того случая, когда экспериментальные средства изучения совокупности частиц гарантируют изменение λ по нашему произволу во всем интервале: $-\infty < \lambda < +\infty$, где

$$\lambda = -\frac{\rho(0)\,\sigma(0)}{kT} e^{V(0)/kT} = -\frac{V(0)}{kT} e^{V(0)/kT} = \lambda_0 e^{-\lambda_0}.$$

Форма (β), (β') предполагает, что такая возможность перенесена на другую величину $-\rho(0)\sigma(0)/kT = -V(0)/kT = \lambda_0$. Связь между ними определяется соотношением $\lambda = \lambda_0 e^{-\lambda_0}$. Благодаря неполному перекрытию в изменении λ и λ_0 и выступающей двузначности, уравнения (α), (α') и (β), (β') различны и описывают, вообще говоря, разные состояния системы многих частиц.

2. Уравнения (β) и (β') имеют тривиальное решение $\varphi(\mathbf{r}) \equiv 0$, справедливое для любого вида ядра и произвольного λ (или произвольных λ_n), т. е. состояние с равномерной плотностью вероятности местоположения частиц является точным решением стационарных уравнений при любом законе сил и произвольной температуре.

3. Для сил, удовлетворяющих условию: $\lambda < 0$, т. е. $\sigma(0) > 0$ (отталкивание превалирует над силами притяжения), решение $\varphi \equiv 0$ единственно. В самом деле, уравнение (β) мы можем написать так:

$$\int \varphi(e^{\varphi} - 1)\, d\mathbf{r} = \lambda \int K(e^{\varphi(\mathbf{r}')} - 1)(e^{\varphi(\mathbf{r})} - 1)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'.$$

Правая часть всегда меньше или равна нулю, так как по условию $\lambda < 0$, а ядро K — положительно, и поэтому мы должны иметь

$$\int \varphi(\mathbf{r})(e^{\varphi(\mathbf{r})} - 1)\, d\mathbf{r} \leqslant 0,$$

но легко видеть, что

$$\varphi(\mathbf{r})(e^{\varphi(\mathbf{r})} - 1) \geqslant 0,$$

поэтому для всех значений φ (положительных и отрицательных) должен стоять знак равенства, откуда следует только единственное решение $\varphi(\mathbf{r}) \equiv 0$. Рассуждая аналогичным образом, для уравнения (β) достаточным условием единственности будет условие: все $\lambda_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots, N-1$).

4. В окрестности точки $\lambda = 0$ на конечном отрезке $0 \leqslant \lambda < \lambda_{\max}$ уравнение (β) имеет единственное голоморфное решение (раскладывающееся в ряд по степеням λ), и это решение тривиальное $\varphi(\mathbf{r}) \equiv 0$. Используя метод последовательных приближений:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \lambda\varphi_1(\mathbf{r}) + \lambda^2\varphi_2(\mathbf{r}) + \lambda^3\varphi_3(\mathbf{r}) + \ldots,$$

и подставляя этот ряд в (β), мы приходим к системе уравнений.

$$\varphi_2 = \int K\varphi_1\, d\mathbf{r}', \ldots, \varphi_h = \int K \left[\varphi_{h-1} + \ldots + \frac{1}{(h-1)!} \varphi_1^{h-1} \right] d\mathbf{r}',$$

но $\varphi_1 \equiv 0$ и, следовательно, $\varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv \ldots = 0$.

Значение $\lambda_{\max}$, до которого можно аналитически продолжать решение $\varphi = 0$, определим позже. Получаем результат:

в интервале температур от ∞ до $T_{\min}$ состояние с равномерной плотностью представляет единственное решение (для произвольных сил взаимодействия). Этот результат, очевидно, обобщается и на уравнение (β') при условии достаточной малости всех λ_n.

5. Уравнение (α) $\left[\text{при условии } \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, d\mathbf{r}' = 1\right]$ имеет, прежде всего, точное решение $\varphi(\mathbf{r}) = 1$ при $\lambda = 1/e$. Полагая $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const} = C$, для определения C имеем трансцендентное уравнение:

$$C = \lambda e^C. \tag{14}$$

Это уравнение при $\lambda > 0$ имеет два решения для C, если $\lambda < 1/e$, и ни одного действительного, если $\lambda > 1/e$, причем одно из них (C_1) увеличивается от нуля, другое (C_2) уменьшается от $+\infty$. В точке $\lambda = 1/e$ оба решения совпадают $C_1 = C_2 = 1$. При значениях $\lambda > 1/e$ уравнение (α) не имеет действительных решений.

Итак, в системе могих частиц, когда величина λ может быть независимой переменной:

1) состояние с равномерной плотностью может существовать только при условии, если λ превосходит некоторое критическое значение ($\lambda = 1/e$);

2) существуют два состояния с равномерной плотностью.

Если λ отрицательно (силы отталкивания преобладают над силами притяжения), то состояния с равномерной плотностью являются единственным решением, как показывает уравнение (14), на всем интервале λ; $0 > \lambda > -\infty$. Для уравнения

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_n \lambda_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)\, e^{\varphi(\mathbf{r}_1)} \ldots e^{\varphi(\mathbf{r}_n)}\, d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n \tag{α'}$$

(при условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n\, d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n = 1$) состояние с равномерной плотностью есть так же решение. Значение $\varphi = C$ определяется трансцендентным уравнением:

$$C = \sum_n \lambda_n e^{nC}, \tag{14a}$$

число решений которого существенно зависит от знаков и величины λ_n.

§ 3. Спектр возможных значений λ, при которых исходные уравнения имеют другие решения помимо тривиального $\varphi \equiv 0$

Определим спектр возможных значений λ линеаризованных уравнений (β), (β'). Для малых значений φ линейные уравнения таковы:

$$\varphi(\mathbf{r}) - \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, \varphi(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = 0, \tag{γ}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) - \sum_n \lambda_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \left\{ \sum_i^n \varphi(\mathbf{r}_i) \right\} d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n = 0. \tag{γ'}$$

Так как K_n — положительно определенные ядра (нормированы на единицу), то очевидно, что для $\lambda < 0$ и $\lambda_n < 0$ $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$ имеет место только тривиальное решение $\varphi(\mathbf{r}) \equiv 0$.

Для $\lambda > 0$ (и аналогично $\sum\limits_{n}^{1\ldots N-1} n\lambda_n > 0$) легко находим, используя метод Фурье, что имеет место непрерывный спектр, заполняющий интервал: $1 \leqslant \lambda < \infty$; $1 \leqslant \sum n\lambda_n < \infty$, с собственными функциями типа $\exp i\mathbf{kr}$, где значение $|\mathbf{k}|$ определяется уравнением (ср. с [3]):

$$1 = \lambda 4\pi \int\limits_0^\infty K(\rho)\rho^2 \frac{\sin k\rho}{k\rho}\, d\rho, \tag{15}$$

$$1 = -4\pi \int\limits_0^\infty \sum_{n}^{1\ldots N-1} \lambda_n \sum_i^n \overline{K}_{n_i}(\rho)\rho^2 \frac{\sin k\rho}{k\rho}\, d\rho, \tag{16}$$

где $\overline{K}_{n_i}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) = \int\limits_{(n-1)} \ldots \int K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)\, d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_{i-1}\, d\mathbf{r}_{i+1} \ldots d\mathbf{r}_n$.

В интервале $0 \leqslant \lambda < 1$ у уравнения (β) нет ограниченных решений, есть решения типа $\sum a_x \exp \vec{\varkappa}\mathbf{r}$ с действительным значением вектора $\vec{\varkappa}$. Минимальные значения λ (соответствующие $k = 0$) определяются формулами:

для уравнения (β) $1 - \lambda = 0$,

для уравнения (β') $1 - \sum n\lambda_n = 0$.

Теперь выясним особенности спектра уравнения, линеаризованного в несколько ином смысле. Пусть $\varphi_0(\mathbf{r})$ есть какое-либо точное решение уравнений (β), (β'). Полагая $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \delta\varphi = \varphi_0(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r})$ и подставляя в (β) и (β'), получим, удерживая только линейные члены в ψ, следующие уравнения (уравнения для „вариаций"):

$$\psi(\mathbf{r}) - \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, e^{\varphi_0(\mathbf{r}')}\psi(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r} = 0, \tag{δ}$$

$$\psi(\mathbf{r}) - \sum_n \lambda^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_n)\, e^{\varphi_0(\mathbf{r}_1)} \ldots e^{\varphi_0(\mathbf{r}_n)} \times$$

$$\left\{ \sum_i^n \psi(\mathbf{r}_i) \right\} d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n = 0. \tag{δ'}$$

Союзное уравнение, соответствующее уравнению (δ), таково:

$$\varphi(\mathbf{r}) - \lambda e^{\varphi_0(\mathbf{r})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, \varphi(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = 0. \tag{δ_s}$$

Между решениями (δ) и (δ_s) существует очевидная связь: $\varphi(\mathbf{r}) = e^{\varphi_0(\mathbf{r})}\psi(\mathbf{r})$. В соответствии с решениями уравнений (γ), и (γ') будем считать φ_0 периодической функцией, период которой определяется уравнениями (15) и (16).

Установим основные свойства уравнения (δ).

1. Периодические функции с периодом d суть решения уравнения (δ), где d — период функции $\varphi_0(\mathbf{r})$. В самом деле, перепишем уравнение (δ) в виде:

$$\psi(\mathbf{r}) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' = 0 \tag{17}$$

$$(\rho(\mathbf{r}) = e^{\varphi_0(\mathbf{r},\lambda)}),$$

откуда видим, что наряду с некоторой функцией $\psi(\mathbf{r})$ функция $\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{n}\,d)$ ($\mathbf{n}$ — целочисленный вектор) также удовлетворяет этому уравнению.

2. Помимо периодических решений с периодом d, интегральное уравнение (17) имеет другие решения типа:

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = e^{2\pi i \mathbf{k}\mathbf{r}/d}\, u(\mathbf{r}, \mathbf{k}), \tag{18}$$

где $\mathbf{k}$ — произвольный действительный вектор, а $u(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ — периодическая функция $\mathbf{r}$ с периодом d.

В самом деле, подстановка (18) в (17) дает

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}'|)\, e^{2\pi i \mathbf{k}\mathbf{r}'/d}\, \rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, u(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' = 0, \tag{19}$$

т. е. уравнение того же типа, как (17), только с отличным ядром, но также зависящим от разности. Уравнение (19) имеет, следовательно, также периодические решения с периодом d.

3. Спектр собственных значений λ при данном $\mathbf{k}$ [в системе функций (18)] дискретен.

Функции (18) удовлетворяют условию:

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{n}\,d, \mathbf{k}) = e^{i2\pi\mathbf{k}\mathbf{n}}\, u(\mathbf{r}). \tag{19a}$$

С помощью этого условия интегральное уравнение (δ) приводится к интегральному уравнению с конечным промежутком интегрирования.

Представим выступающий интеграл в виде суммы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\rho(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' = \sum_{\mathbf{n}} \int_{d^3} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\rho(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}',$$

где интегрирование в правой части распространено по элементарной ячейке d^3 с номером (n_x, n_y, n_z).

Используя условие периодичности $\rho(\mathbf{r})$ и условие (19a), имеем:

$$\int_{d^3} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\rho(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'_n =$$

$$= \int_{d^3} K(|\mathbf{r}-\mathbf{n}\,d-\mathbf{r}'|)\rho(\mathbf{r}')\, e^{2\pi i \mathbf{k}\mathbf{n}}\psi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'.$$

Следовательно, исходное уравнение приводится к виду:

$$\psi(\mathbf{r}) - \lambda \int_{d^3} G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{k}|)\rho(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' = 0, \tag{20}$$

где

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{k}} K(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{n}d). \tag{21}$$

Полученное уравнение принадлежит к обычному типу интегральны уравнений Фредгольма, и, следовательно, каждому действительном значению $\mathbf{k}$ принадлежит бесконечный дискретный спектр веществе ных собственных значений: $\lambda_1(\mathbf{k}), \lambda_2(\mathbf{k}), \ldots, \lambda_n(\mathbf{k}), \ldots$ Таким образо состояние частицы можно характеризовать номером зоны: λ_n. Внутр каждой зоны λ непрерывно зависит от $\mathbf{k}$. Вскроем эту зависимость

Пусть имеет место разложение в ряд Фурье:

$$\rho(\mathbf{r}) = e^{\varphi_0(\mathbf{r}, \lambda_0)} = \sum_{\mathbf{h}} \rho_{\mathbf{h}} e^{2\pi i (\mathbf{hr})}; \ \mathbf{h} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3,$$

h_1, h_2, h_3 — целые числа; $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ — единичные векторы осей „обрат ной“ решетки.

Представляем $\psi(\mathbf{r})$ рядом:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{h}} a_{\mathbf{h}} e^{i(\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{h}, \mathbf{r})},$$

подстановка этих выражений в (δ) дает

$$a_{\mathbf{g}} = \lambda\sigma(|\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{g}|) \sum_{\mathbf{h}} a_{\mathbf{g}-\mathbf{h}} \rho_{\mathbf{h}}(\lambda), \tag{22}$$

($\mathbf{g} = 2\pi\mathbf{m}/d$, $\mathbf{m}$ — целочисленный вектор),

$$\sigma(|\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{g}|) = 4\pi \int_0^\infty K(\rho) \frac{\sin|\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{g}|\rho}{|\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{g}|\rho} \rho^2 d\rho.$$

Условием разрешимости бесконечной системы уравнений (22) является равенство нулю определителя:

$$\Delta(\lambda, \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & (\lambda\sigma(k))^{-1} & \rho_{100} & \rho_{010} & \ldots \\ \ldots & \rho_{-100} & -(\lambda\sigma(\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}_1))^{-1} & \rho_{-100} & \ldots \\ \ldots & \rho_{0,-1,0} & \rho_{1,-1,0} & -(\lambda\sigma(\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}_2))^{-1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \tag{22a}$$

Отсюда получаем λ, соответствующую волновому вектору $\mathbf{k}$.

Результат: *Уравнение*

$$\psi(\mathbf{r}) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0$$

$$(\rho(\mathbf{r} + d) = \rho(\mathbf{r}))$$

имеет полосатый спектр собственных значений λ со счетным числом полос $\lambda_1(\mathbf{k})$, $\lambda_2(\mathbf{k}), \ldots, \lambda_n(\mathbf{k}), \ldots$ и с собственными функциями типа:

$$\psi_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = e^{i2\pi\mathbf{kr}/d} u_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}), \quad (u(\mathbf{r} + d, \mathbf{k}) = u(\mathbf{r}, \mathbf{k})),$$

где $\mathbf{k}$ — произвольный действительный вектор. Внутри каждой полосы λ непрерывно зависит от $\mathbf{k}$.

§ 4. Общие соображения о ветвлении решений уравнений

$$\lambda\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)(e^{\varphi(\mathbf{r}')}-1)\,d\mathbf{r}'\,^{2}, \qquad (\beta_1)$$

$$\lambda\varphi = \sum_n \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} K_n(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\ldots\mathbf{r}_n)(e^{\varphi_0(\mathbf{r}_1)}\ldots e^{\varphi_0(\mathbf{r}_n)}-1)\,d\mathbf{r}_1\ldots d\mathbf{r}_n. \qquad (\beta'_1)$$

Пусть $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}, \lambda_0)$ есть одно из точных решений уравнения (β_1), при этом соответствующее значение $\lambda = \lambda_0$. Для выяснения вопроса о характере решения в окрестности $\lambda = \lambda_0$ положим $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}, \lambda_0) + \psi(\mathbf{r})$, $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$. Подставляя в (β_1) и учитывая, что по условию φ_0 удовлетворяет уравнению (β_1) при $\lambda = \lambda_0$, получим следующее уравнение для определения $\psi(\mathbf{r})$:

$$\mathrm{K}\{\psi + \psi^2/2! + \psi^3/3! + \cdots\} - (\lambda_0 + \varepsilon)\psi = \varepsilon\varphi_0, \qquad (23)$$

где K обозначает интегральный оператор:

$$\mathrm{K}\{\cdots\} = \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,e^{\varphi_0(\mathbf{r}')}\{\cdots\}\,d\mathbf{r}',$$

с ядром Ke^{φ_0}. Уравнение (23) пока является точным — эквивалентным уравнению (β_1).

Аналогичное преобразование для уравнения (β'_1) дает:

$$\sum_n \lambda_n\,\mathrm{K}_n\left\{\sum_i^n \psi(\mathbf{r}_i) + \sum_i^n\sum_j^n \alpha_{ij}\psi(\mathbf{r}_i)\psi(\mathbf{r}_j) + \ldots\right\} - (\lambda_0+\varepsilon)\psi = \varepsilon\varphi_0, \qquad (24)$$

где K_n обозначает многомерный интегральный оператор

$$\mathrm{K}_n\{\cdots\} = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} K_n(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n)(e^{\varphi_0(\mathbf{r}_1)}\ldots e^{\varphi_0(\mathbf{r}_n)})\{\cdots\}\,d\mathbf{r}_1\ldots d\mathbf{r}_n \qquad (25)$$

α_{ij} в (24) — постоянные числа, обусловленные наличием факториалов $[(1/n!)$, выступающих при разложении e^{φ} в ряд по $\varphi]$.

Нелинейные уравнения (23), (24) будем решать методом последовательных приближений:

$$\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi_1(\mathbf{r}) + \varepsilon^2\psi_2(\mathbf{r}) + \varepsilon^3\psi_3(\mathbf{r}) + \cdots,$$

приравнивая члены с одинаковыми степенями ε, получим необходимый ряд уравнений последовательных приближений. Но может случиться (см. далее), что полученная таким способом система последовательных приближений неразрешима в классе ограниченных функций: $|\psi_n(\mathbf{r})| < \infty$ (нет голоморфных решений). В этом случае мы должны искать решение в виде следующего ряда:

$$\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon^{1/n}\psi_1(\mathbf{r}) + \varepsilon^{2/n}\psi_2(\mathbf{r}) + \varepsilon^{3/n}\psi_3(\mathbf{r}) + \cdots\,^{3},$$

где n — целое число. (Случай ветвления решений, n — возможное число ветвей.)

---

[2] В отличие от (β) и (β') здесь удобней ввести параметр λ не у ядра, а у свободного члена.

[3] См. монографии по теории нелинейных интегральных уравнений, например, Н. Назаров. Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна. Узгосиздат, 1941.

Для наших целей достаточно рассмотреть $n = 2$. Приходим к двум системам уравнений последовательных приближений:

„голоморфная“ последовательность:

$$K\{\psi_1\} - \lambda_0 \psi_1 = \varphi_0, K\{\psi_2\} - \lambda_0 \psi_2 = \psi_1 - K\{\psi_1^2/2!\},$$
$$K\{\psi_3\} - \lambda_0 \psi_3 = \psi_2 - K\{\psi_1^3/3! + \psi_1 \psi_2\}, \ldots \tag{26}$$

„неголоморфная“ последовательность:

$$K\{\psi_1\} - \lambda_0 \psi_1 = 0, \quad K\{\psi_2\} - \lambda_0 \psi_2 = \varphi_0 - K\{\psi_1^2/2!\},$$
$$K\{\psi_3\} - \lambda_0 \psi_3 = \psi_1 - K\{\psi_1^3/3! + \psi_1 \psi_2\}, \ldots \tag{27}$$

Эти две системы и положены в основу дальнейшего анализа.

Аналогичные системы мы получили и для уравнения (β_1'), где только теперь интегральный оператор K выражается через посредство суммы выражений (25).

§ 5. Ответвление решений от тривиального $\varphi_0 \equiv 0$

Положим в (26) и (27) $\varphi_0 = 0$ и исследуем прежде всего голоморфные решения. Пусть $\lambda_0 > 1$, тогда на основании § 2 первое уравнение системы (26) имеет только тривиальное решение $\psi_1 \equiv 0$. Соответственно этому и для всех последующих приближений система (26) дает $\psi_2 \equiv \psi_3 \equiv \cdots \equiv 0$. Отсюда вывод: при $\lambda_0 > 1$ исходное уравнение (β_1) не имеет отличного от нуля голоморфного решения.

Пусть теперь $\lambda_0 < 1$, в этом случае на основании § 2 первое уравнение системы (26) имеет решение

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \sum_n c_n e^{i\mathbf{k}_n \mathbf{r}},$$

где c_n — совершенно произвольные постоянные, а $|\mathbf{k}_n|$ — корни уравнения [ср. с (15)]:

$$\sigma(|\mathbf{k}_n|) - \lambda_0 = 0 \tag{28}$$

Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда корень уравнения (28) единственен (периодические решения); $k_n = k$ ($2\pi/k_0 = d$) и $\psi_1(\mathbf{r}) = c_1 \sin \mathbf{k}_0 \mathbf{r} + c_2 \cos \mathbf{k}_0 \mathbf{r}$ (ради простоты положим в дальнейшем $c_2 = 0$), и определим амплитуду $c_1 = c$. Для этой цели рассмотрим второе уравнение системы (26). Оно принадлежит к типу

$$K\{\psi_2\} - \lambda_0 \psi_2(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \tag{29}$$

где $K\{\ldots\}$ интегральный оператор § 4. Легко видеть, используя метод интеграла Фурье, что решение (29) есть

$$\psi_2(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_{\mathbf{k}} [\sigma(\mathbf{k}) - \lambda_0]^{-1} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k},$$

$$f_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}; \quad \sigma(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}|) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \tag{30}$$

Правая часть $f(\mathbf{r})$ есть строго периодическая функция с периодом d

$$f = \psi_1 - K\{{}^1/_2\, \psi_1^2\} = c \sin \mathbf{k}_0 \mathbf{r} - {}^1/_4\, c^2 [\sigma(2\mathbf{k}_0) \cos 2\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \sigma(0)],$$

с коэффициентом при резонансном члене $e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}$, равным $f_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} = c$.

В решении (30) при $c \neq 0$, числитель отличен от нуля. Знаменатель же при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ равен нулю, так как по условию $\mathbf{k}_0$ есть корень уравнения (28), следовательно, $\psi_2(\mathbf{r}) = \infty$. Отсюда:

1. Для всех значений $\lambda_0 < 1$ система уравнений (26) неразрешима, т. е. исходное уравнение (β_1) в любой точке значений $\lambda_0 < 1$ не имеет голоморфных решений.

2. Факт отсутствия голоморфных решений указывает, что значения λ_0 на всем интервале $\lambda_0 < 1$ являются точками ветвления решений исходного уравнения. Вполне аналогичный результат имеет место и для уравнения (β_1'), где только теперь на основании § 2 критическое значение λ_0, начиная с которого исчезают голоморфные решения, определяется формулой:

$$\lambda_0 = \sum n \lambda_n .$$

Обратимся к „неголоморфной" последовательности уравнений (27). Ограничимся рассмотрением случая, когда корень уравнения (28) первого ранга, и пусть $\psi_1(\mathbf{r}) = c \sin \mathbf{k}_0 \mathbf{r}$. Правая часть во втором уравнении системы (27) есть периодическая функция с удвоенным волновым числом. Используя для решения второго уравнения системы (27) метод ряда Фурье, легко получим:

$$\psi_2(\mathbf{r}) = -\frac{c^2}{4}\left[\frac{\sigma(2\,\mathbf{k}_0)}{\sigma(2\,\mathbf{k}_0) - \lambda_0} \cos 2\,\mathbf{k}_0\,\mathbf{r} - \frac{\sigma(0)}{\sigma(0) - \lambda_0}\right].$$

Третье приближение дает возможность определить постоянную c из требования уничтожения коэффициента при „резонансном" члене $e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}$, что дает

$$c^2 = \frac{1}{\sigma(\mathbf{k}_0)}\left\{\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\,\frac{\sigma(2\,\mathbf{k}_0)}{\sigma(2\,\mathbf{k}_0) - \lambda_0} + \frac{1}{4}\,\frac{\sigma(0)}{\sigma(0) - \lambda_0}\right\}^{-1}.$$

Все последующие приближения не изменяют периодичности решения, так как всегда правая часть будет периодической функцией основного периода, ибо действие оператора K над периодической функцией воспроизводит периодическую функцию с тем же периодом:

$$\mathrm{K}\left\{\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\right\} = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}\, \sigma(k)\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

[где $\sigma(k)$ — компонента Фурье функции $K(\mathbf{r})$], а однородное уравнение является тождественным во всех приближениях. Получаем результат: для уравнения $\lambda_0 \varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)(e^{\varphi(\mathbf{r}')} - 1)\, d\mathbf{r}'$, *при* $\lambda_0 < 1$ *в каждой точке значений* λ_0, *помимо тривиального решения, существует неголоморфное решение в виде периодической функции, причем период определяется уравнениями* (28), (15), *а амплитуды методом последовательных приближений.*

§ 6. Ответвление решений от периодического решения

При значениях $\lambda_0 < 1$ от решения $\varphi_0(\mathbf{r}) \equiv 0$ ответвляются периодические решения с периодом и амплитудами, зависящими от λ_0. Будем следовать по одной из таких ветвей и спросим себя о характере изменения решения (периодического). Существуют ли и в этом случае точки ветвления решений? Каков характер новых решений? Исследуем

прежде всего „голоморфную“ последовательность приближений (система (26)].

При $\lambda_0 < 1$:

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}} e^{ik_0\mathbf{n}\mathbf{r}},$$

где φ_0 — строго периодическая функция с периодом d, определяемым уравнением (28), и с известными коэффициентами Фурье. Нужно различать два случая: λ_0 — нехарактеристическое число ядра Ke^{φ_0}; λ_0 — характеристическое число того же ядра.

1. λ_0 — нехарактеристическое число ядра Ke^{φ_0}

Для решения первого уравнения системы (26) применим метод ряда Фурье. Пусть

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{h}} a_{\mathbf{h}} e^{2\pi i\mathbf{h}\mathbf{r}}, \qquad \rho(\mathbf{r}) = e^{\varphi_0(\mathbf{r})} = \sum_{\mathbf{h}} \rho_{\mathbf{h}} e^{2\pi i\mathbf{h}\mathbf{r}}$$

($\mathbf{h} = \mathbf{n}/d$, где $\mathbf{n}$ — целочисленный вектор). Подстановка в первое уравнение из (26) приводит к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sigma(g) \sum_{\mathbf{h}} a_{\mathbf{g}-\mathbf{h}} \rho_{\mathbf{h}} - \lambda_0 a_{\mathbf{g}} = c_{\mathbf{g}}, \quad \sigma(g) = 4\pi \int_0^\infty K(\rho)\rho^2 \frac{\sin g\rho}{g\rho} d\rho \tag{31}$$

($\mathbf{g} = 2\pi\mathbf{n}_g/d$, где $\mathbf{n}_g$ — целочисленный вектор).

Эта система определяет коэффициенты $a_{\mathbf{g}}$ через известные величины $c_{\mathbf{g}}$, $\rho_{\mathbf{h}}$ и $\sigma(g)$. При этом предположено, что детерминант $\Delta'(\lambda_0) \neq 0$.

Итак $\psi_1(\mathbf{r})$ однозначно определено. Последующие приближения не изменяют периодичности решения, так как во всех приближениях правая часть будет периодической функцией, и, следовательно, метод ряда Фурье опять дает решение в виде периодической функции. Отсюда результат: Если λ_0 — нехарактеристическое число ядра Ke^{φ_0}, то решением нелинейного исходного уравнения (β_1) является строго периодическая функция.

2. λ_0 — характеристическое число ядра Ke^{φ_0}

Так как φ_0 — периодическая функция, то применим к решению „голоморфной“ последовательности уравнений (27) опять метод ряда Фурье. Идя прежним путем, приходим к бесконечной системе уравнений (31), но теперь, в отличие от предыдущего случая, эта система неразрешима, так как

$$\Delta'(\lambda_0, g) = 0. \tag{32}$$

Равенство нулю детерминанта (32) есть условие того, что λ_0 есть характеристическое число, так как $\Delta'(\lambda_0, g) = -\Delta(1/\lambda_0, \mathbf{k} = \mathbf{g})$, где Δ детерминант (22а) при $\mathbf{g} = \mathbf{k}$.

Таким образом приходим к выводу: если λ_0 есть характеристическое число ядра Ke^{φ_0}, где φ_0 — периодическая функция, то исходное уравнение (β_1) не имеет периодических решений.

Обратимся к исследованию неголоморфной последовательности (27). Решение первого уравнения этой последовательности есть

$$\psi_1(\mathbf{r}) = c\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = c\psi(\mathbf{r}),$$

постоянную c нужно выбрать так, чтобы удовлетворить условиям разрешимости уравнений последующих приближений. Условие разрешимости второго уравнения системы (27) таково:

$$\int (\varphi_0(\mathbf{r}) - c^2 \mathrm{K}\{\psi^2/2!\})\,\psi^s(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = 0,$$

где $\psi^s(\mathbf{r})$ — решение союзного уравнения [(δ_s) § 3] $\psi^s(\mathbf{r}) = e^{\varphi_0}\psi(\mathbf{r})$ Условие разрешимости можно записать так:

$$c^2 = \frac{\int \varphi_0(\mathbf{r})\, e^{\varphi_0(\mathbf{r})}\,\psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}}{\iint K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, e^{\varphi_0(\mathbf{r})}\,\frac{1}{2!}\,\psi^2(\mathbf{r}')\,\psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{r}'}.$$

Постоянная c^2 определена. Выступают две возможности: или имеют место два действительных решения, или ни одного, смотря по знаку c^2.

Следствие:

1. *Значения λ_0, являющиеся характеристическими числами уравнения:*

$$\psi(\mathbf{r}) - \lambda_0 \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, e^{\varphi_0(\mathbf{r}')}\,\psi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' = 0,$$

суть точки ветвления исходного нелинейного уравнения (β_1).

2. *В точке ветвления прекращаются периодические решения исходного уравнения.*

3. *В окрестности точки ветвления могут быть или два неголоморфных решения типа: $\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\,u(\mathbf{r},\mathbf{k})$, где $|\mathbf{k}|$ — произвольное действительное число, а $u(\mathbf{r},\mathbf{k})$ — периодическая функция, или ни одного действительного.*

§ 7. Особые решения

Будем называть особыми те из решений исходных уравнений (α), (α'), (β), (β'), для которых имеет место какой-либо из двух случаев:

1. Не существует разложения в ряд решения по положительным степеням λ в окрестности точки $\lambda = 0$, а наоборот, при $\lambda \to 0$ решения стремятся к бесконечности.

2. Не существует разложения в ряд подинтегрального выражения исходных уравнений или по положительным и целым степеням неизвестной функции, или по основному параметру уравнения, входящего в подинтегральное выражение.

Термин „особые" решения для нелинейных интегральных уравнений ввел математик Н. Назаров. Целесообразность выделения „особого" класса решений диктуется тем обстоятельством, что приближенные методы решения нелинейных интегральных уравнений, основывающиеся на разложении функций в голоморфные ряды, могут не исчерпывать других решений.

а. Одно из решений уравнения:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, e^{\varphi(\mathbf{r}')}\,d\mathbf{r}' \qquad (\alpha)$$

[при условии $\int_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,d\mathbf{r}' = 1$], принадлежит к особым решениям.

В самом деле, трансцендентное уравнение: $c = \lambda e^c$, определяющее решение $\varphi = c$, имеет два решения при условии $0 \leqslant \lambda < 1/e$. Одно из них, изменение которого лежит в интервале: $\infty > c_2 > 1$, причем $0 < \lambda < 1/e$, принадлежит к особому решению (случай 1), так как при $\lambda \to 0$, $c_2 \to +\infty$. Второе решение является голоморфным в точке $\lambda = 0$.

б. Рассмотрим исходное уравнение в форме (5). В окрестности $T = 0$ подинтегральное выражение не разлагается в ряд Тейлора по T и поэтому должно быть отнесено к особому решению (случай 2). Для того чтобы получить решение при $T = 0$, применим асимптотическую формулу Лапласа.

Предположим, что в некоторой произвольной точке пространства, взятой за начало координат, реализуется следующее условие для пространственных производных решения:

$$V'_x(0) = V'_y(0) = V'_z(0) = 0, \qquad V''_x(0) = V''_y(0) = V''_z(0) > 0.$$

Возможность такого предположения мы должны будем проверить после того, как получим решение. На основании этого имеем:

$$V(\mathbf{r}) - V(0) = (1/2!)\,(x^2 + y^2 + z^2)\,V''(0) + \cdots$$

Рассмотрим точку T, близкую к $T = 0$. Используя асимптотическую формулу Лапласа, можем написать

$$\int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\, e^{-(x^2+y^2+z^2)V''(0)/2kT}\, d\mathbf{r}' \to (2\pi kT / V''(0))^{3/2}\, K(|\mathbf{r}|), \tag{33}$$

при условии $T \to 0$. Имеем также

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(0)\, e^{-[V(\mathbf{r}) - V(0)]/kT} \to \rho(0)\, e^{-(x^2+y^2+z^2)/(2kT/V''(0))}.$$

Наложим на функцию $\rho(\mathbf{r})$ условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = 1$. Тогда $\rho(0) = (V''(0)/2\pi kT)^{3/2}$. Совершая переход к $T = 0$, получаем решение

$$\rho(\mathbf{r}) = \delta(|\mathbf{r}|), \quad V(\mathbf{r}) = K(|\mathbf{r}|). \tag{34}$$

Исходное предположение имеет место при условии $K'(0) = 0$; $K''(0) > 0$.

Перейдем к уравнению (6). Рассуждая аналогично, получаем результат:

при $T = 0$ решение уравнения (6) есть

$$V(\mathbf{r}) = \sum_n K_n(\mathbf{r}, 0, \ldots, 0); \quad \rho(\mathbf{r}) = \delta(|\mathbf{r}|), \tag{35}$$

при условии:

$$\sum_n K'_n(0, \ldots, 0_n) = 0; \quad \sum_n K''_n(0, \ldots, 0_n) > 0.$$

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 23 марта 1948 г.

Лите атура

[1] А. А. Власов. ЖЭТФ, 8, 291, 1938. — [2] А. А. Власов. Уч. зап. МГУ, вып. 75, кн. 2, ч. 1, 1945. — [3] А. А. Власов. Изв. АН СССР, сер. физ., 8, 248, 1944. — [4] А. А. Власов. Journ. of Phys., 9, 130, 1945. — [5] А. А. Власов. Вестн. Моск. гос. ун-та, 3—4, 63, 1946.